

1 Calculer le terme général des suites (u_n) suivantes :

1. $u_0 = 1, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$.
2. $u_0 = 2, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 5, u_1 = 13$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$.
4. $u_0 = 2, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

1. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique associée :

$$x^2 = -2x - 1 \iff x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x + 1)^2 = 0 \iff x = -1$$

Il existe donc deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(-1)^n + \mu n(-1)^n$$

Avec les conditions initiales, on a $\begin{cases} \lambda = 1 \\ -\lambda - \mu = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -5 \end{cases}$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n(1 - 5n)}$$

2. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 2x - 4 \iff x^2 - 2x + 4 = 0 \stackrel{\Delta=-12}{\iff} x = \frac{2 \pm i2\sqrt{3}}{2} \iff x = 1 \pm i\sqrt{3} \iff x = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

Il existe donc deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \mu 2^n \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

Avec les conditions initiales, on a $\begin{cases} \lambda = 2 \\ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lambda + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \left(2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right)}$$

3. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 4x + 5 \iff x^2 - 4x - 5 = 0 \stackrel{\Delta=36}{\iff} x = \frac{4 \pm 6}{2} \iff x = 5 \text{ ou } x = -1$$

Il existe donc deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a 5^n + b (-1)^n.$$

Avec les conditions initiales, on a $\begin{cases} a + b = 5 \\ 5a - b = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 5^n + 2(-1)^n}$$

4. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 3x - 2 \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \stackrel{\Delta=1}{\iff} x = \frac{3 \pm 1}{2} \iff x = 2 \text{ ou } x = 1$$

Il existe donc deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu 1^n = \lambda 2^n + \mu$$

Avec les conditions initiales, on a $\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 2\lambda + \mu = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1}$$

2 Soit M la matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ contenant uniquement des 1, sauf des 0 sur la diagonale.

1. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1} .
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = \alpha_k M + \beta_k I$ où (α_k) est récurrente linéaire double et où $\beta_k = (n-1)\alpha_k$.

1. Si J désigne la matrice d'ordre n qui contient uniquement des 1, on a donc :

$$M = J - I$$

Il est facile de voir que $J^2 = nJ$, donc :

$$M^2 = (J - I)^2 = J^2 - 2J + I = (n-2)J + I = (n-2)(M + I) + I = (n-2)M + (n-1)I$$

La matrice M est donc inversible car on a :

$$M \left(\frac{1}{n-1}M - \frac{n-2}{n-1}I \right) = I$$

$$\text{et } M^{-1} = \frac{1}{n-1}M - \frac{n-2}{n-1}I.$$

2. Puisque $M^2 \in \text{Vect}(M, I)$, il est alors facile de vérifier par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, M^k = \alpha_k M + \beta_k I$$

avec α_k et β_k à déterminer.

En effet, on a $M^0 = 0.M + 1.I$, $M^1 = 1.M + 0.I$, $M^2 = (n-2)M + (n-1)I$.

Soit $k \geq 0$. Si $M^k = \alpha_k M + \beta_k I$, alors on a :

$$M^{k+1} = M.M^k = \alpha_k M^2 + \beta_k M = \alpha_k(n-2)M + \alpha_k(n-1)I + \beta_k M = \left[(n-2)\alpha_k + \beta_k \right] M + [(n-1)\alpha_k] I$$

On voit donc qu'on a donc encore $M^{k+1} = \alpha_{k+1}M + \beta_{k+1}I$, en posant :

$$\alpha_{k+1} = (n-2)\alpha_k + \beta_k \quad \text{et} \quad \beta_{k+1} = (n-1)\alpha_k$$

On a alors :

$$\alpha_{k+2} = (n-2)\alpha_{k+1} + (n-1)\alpha_k$$

La suite (α_k) est donc récurrente linéaire double, d'équation caractéristique $x^2 - (n-2)x - (n-1) = 0$, de solutions -1 et $n-1$:

$$\alpha_k = \lambda(n-1)^k + \mu(-1)^k$$

On trouve facilement que $\lambda = 1/n$ et $\mu = -1/n$, d'où :

$$\alpha_k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}$$

et alors :

$$M^k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n} M + \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n} I$$

3 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 - 2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & u_n + 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que (u_n) est arithmético-géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

1. Posons $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors : $A = I + 3J$.

La question est de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in \mathbb{R} / A^n = I_3 + u_n J$$

- Pour $n = 0$, il suffit de poser $u_0 = 0$. On a alors $A^0 = I_3 = I_3 + u_0 J$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons qu'il existe un réel u_n tel que $A^n = I_3 + u_n J$. Alors :

$$A^{n+1} = A^n \times A = (I_3 + u_n J)(I_3 + 3J) = I_3 + (u_n + 3)J + 3u_n J^2$$

Or, $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -J$, donc on a :

$$A^{n+1} = I_3 + (u_n + 3)J - 3u_n J = I_3 + (-2u_n + 3)J = I_3 + u_{n+1} J \quad \text{en posant } u_{n+1} = -2u_n + 3$$

- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel u_n tel que $A^n = I_3 + u_n J$.
2. Par construction de (u_n) , on a vu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 3 \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$

La suite (u_n) est donc arithmético-géométrique.

L'équation caractéristique associée est $x = -2x + 3 \iff x = 1$.

La suite $(u_n - 1)$ est donc géométrique de raison -2 . On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 1 = (-2)^n (u_0 - 1) \implies u_n = 1 - (-2)^n$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = I_3 + (1 - (-2)^n) J$$

4 Calculer les limites suivantes, en utilisant éventuellement les DL usuels en 0 :

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2} - n)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$6. \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - 3) \ln \left(\frac{n+3}{n+2}\right)$$

$$7. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + n^2)^{1/n}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^2 + 3n + 1}{\ln(n) + 5}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$1. \sqrt{n^2 + 2} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 2} - n)(\sqrt{n^2 + 2} + n)}{\sqrt{n^2 + 2} + n} = \frac{(n^2 + 2) - n^2}{\sqrt{n^2 + 2} + n} = \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2} + n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{0}$$

$$2. \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} = \frac{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{1}$$

3.

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} &= \frac{(n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2} = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{1}{2}}$$

5.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \exp \left(n \left(\frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right) \quad \text{car } \boxed{\ln(1+x) = x + o(x)} \\ &= \exp(1 + o(1)) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{e} \end{aligned}$$

6. Toujours en utilisant $\boxed{\ln(1+x) = x + o(x)}$ lorsque $x \rightarrow 0$, on a :

$$(2n-3) \ln \left(\frac{n+3}{n+2}\right) = (2n-3) \ln \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) = (2n-3) \left(\frac{1}{n+2} + o \left(\frac{1}{n+2} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n-3}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{2}$$

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\sqrt{n^2} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n}$, donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

Donc en sommant les inégalités :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2}}$$

Or, $\frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$ et $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc par théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

8.

$$(1+n^2)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(1+n^2)\right)$$

Or,

$$\frac{\ln(1+n^2)}{n} = \frac{\ln(n^2(1+\frac{1}{n^2}))}{n} = 2\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc :

$$(1+n^2)^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = \boxed{1}$$

9.

$$\frac{(\ln n)^2 + 3n + 1}{\ln(n) + 5} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{+\infty} \quad (\text{croissances comparées})$$

10. Posons pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{n^n}{n!}$.

On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

Comme $e > 2$, on peut donc dire qu'il existe un rang k tel que : $\forall n \geq k, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2 \implies u_{n+1} \geq 2u_n$.

Alors, pour tout $n \geq k$, on a :

$$u_n \geq 2u_{n-1} \geq 2^2u_{n-2} \geq 2^3u_{n-3} \geq \dots \geq 2^{n-k}u_k$$

On a donc :

$$\forall n \geq k, u_n \geq 2^n \times \frac{u_k}{2^k}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, donc par comparaison on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

5 Déterminer un équivalent simple des suites suivantes, en utilisant éventuellement les DL usuels en 0 :

$$1. u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

$$2. v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

$$3. w_n = \ln(1+n^3)$$

$$4. x_n = \frac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}{n+1}$$

$$5. y_n = \binom{n}{k} \text{ (pour } k \text{ fixé).}$$

$$6. z_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n^2}\right) \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{(e^{1/n} - e^{-1/n}) \left(\left(\frac{1}{n} + 1\right)^5 - 1\right)}.$$

$$1. u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) - (n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{n^2-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\frac{2}{n^2}}$$

$$2. v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{2\sqrt{n}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$3. w_n = \ln(1+n^3) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n^3) = \boxed{3 \ln(n)}$$

4. En utilisant les DL $\ln(1+x) = x + o(x)$ et $\sin(x) = x + o(x)$, on en déduit que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a donc :

$$x_n = \frac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{n} = \boxed{\frac{1}{n^2}}$$

5. Pour k fixé et $n \geq k$, on a :

$$y_n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\frac{n^k}{k!}}$$

$$6. \text{ On a } \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En utilisant successivement $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on a :

$$\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} = \frac{-1}{2n^2}$$

En utilisant $e^x = 1 + x + o(x)$, on a :

$$e^{1/n} - e^{-1/n} = \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

Et enfin en utilisant $(1+x)^5 - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 5x$, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{5}{n}$$

Finalement par produit et quotient, on a :

$$z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{-1}{2n^2}\right)}{\frac{2}{n} \times \frac{5}{n}} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{4n^2}}{\frac{10}{n^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\frac{-\sqrt{3}}{40}}$$

- 6** 1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$.
2. On note : $\forall n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Montrer que (S_n) converge vers un réel ℓ tel que $2 < \ell \leq 3$.

1. Pour $n \geq 1$, $\frac{2^{n-1}}{n!} = \binom{2}{n} \binom{2}{n-1} \cdots \binom{2}{3} \binom{2}{2} \leq 1$ (on a un produit de $n - 1$ réels positifs inférieurs à 1).
2. Soit $n \geq 1$. On peut écrire que :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 3$$

Remarquons que la suite (S_n) est clairement croissante (somme de termes positifs), et comme $S_2 = 5/2$, on a :

$$\forall n \geq 2, \frac{5}{2} \leq S_n \leq 3$$

La suite (S_n) est donc croissante et majorée, elle converge vers un réel ℓ , et en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$2 < \frac{5}{2} \leq \ell \leq 3$$

7 Soit (S_n) la suite définie par : $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Qu'en déduire sur (S_n) ?

Notons pour tout $n \geq 1, u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$

- Pour tout $n \geq 1,$

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

- Pour tout $n \geq 1,$

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \leq 0$$

La suite (v_n) est donc décroissante.

- Pour tout $n \geq 1,$

$$u_n - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. On en déduit alors que les suite (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent toutes les deux vers une même limite, et on en déduit finalement que la suite (S_n) converge.

8 On note pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la limite de (S_n) .
3. On pose $T_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (T_n) converge. En déduire un équivalent de S_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. Pour $n \geq 1$, on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Or, $2\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$, donc : $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$, ce qui fournit l'encadrement souhaité.

2. La réponse de la question précédente peut aussi s'écrire :

$$\forall k \geq 1, \quad 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

(l'inégalité de droite est bien vraie également pour $k = 1$ car on a bien « $1 \leq 2$ »).

En sommant les inégalités pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient :

$$2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq S_n \leq 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

autrement dit :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n}$$

Par comparaison (dans l'inégalité de gauche), on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty}$$

3.

$$T_{n+1} - T_n = S_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - S_n + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0$$

La suite (T_n) est donc décroissante.

De plus, d'après l'encadrement de la question 2 :

$$2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \leq T_n \leq 0$$

Or, on a :

$$2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -2$$

donc il existe un rang N à partir duquel on a : $\forall n \geq N$, $-3 < 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n}$. Ainsi :

$$\forall n \geq N, \quad -3 < T_n$$

La suite (T_n) est donc décroissante, et au moins à partir d'un certain rang, deviendra minorée par -3 , donc converge. Il existe donc un réel ℓ tel que :

$$T_n = S_n - 2\sqrt{n} = \ell + o(1)$$

Autrement dit :

$$S_n = 2\sqrt{n} + \ell + o(1) \implies \boxed{S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$$

9 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

On suppose que pour tout $n \geq 0$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

1. Montrer que si $u_n \rightarrow +\infty$, alors $v_n \rightarrow +\infty$
2. Montrer que si $v_n \rightarrow 0$, alors $u_n \rightarrow 0$.

1. Remarquons que puisque les deux suites sont strictement positives, en composant par le logarithme, on obtient :

$$\forall k \geq 0, \quad \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) \leq \ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)$$

En sommant ces inégalités pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on obtient :

$$\ln(u_n) - \ln(u_0) \leq \ln(v_n) - \ln(v_0)$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = +\infty$, donc par comparaison, $\ln(v_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

2. En reprenant les inégalités précédentes, on a :

$$\forall n \geq 1, \quad \ln(u_n) - \ln(u_0) \leq \ln(v_n) - \ln(v_0)$$

Si (v_n) converge vers 0, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(v_n) = -\infty$, donc par comparaison, on a aussi

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

10 Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

La suite (u_n) est croissante car : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$.

Ainsi, soit (u_n) converge, soit (u_n) diverge vers $+\infty$.

Si la suite (u_n) convergerait vers un réel ℓ , alors par passage à la limite dans l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$$

on obtiendrait que $\ell = \ell + e^{-\ell}$, autrement dit $e^{-\ell} = 0$, ce qui est impossible.

Ainsi, nécessairement la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

11 Soit (u_n) définie par $u_0 = 1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq 1$ » est vraie.

- $n = 0$, $u_0 = 1/2$: c'est dans l'énoncé, donc $0 \leq u_0 \leq 1$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geq 0$ fixé. Supposons que pour cet entier n , $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, i.e. que $0 \leq u_n \leq 1$. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également.

On a $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

Comme $0 \leq u_n \leq 1$, on a aussi $0 \leq 1 - u_n \leq 1$, donc par produit $0 \leq u_n(1 - u_n) \leq 1$, ainsi, on a bien $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également.

- Par récurrence, la propriété est donc bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$$

donc la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ tel que $\ell \geq 0$.

Puisqu'on a la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

par passage à la limite dans cette égalité, le nombre ℓ doit nécessairement vérifier

$$\ell = \ell - \ell^2$$

ce qui nous donne donc que $\ell^2 = 0$, soit $\ell = 0$.

Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

12 Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

1. On procède par récurrence.

$u_0 = 1$, donc on a bien $u_0 > 0$.

De plus, si pour un certain entier n , on a $u_n > 0$, alors par produit $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0$.

Ainsi, par récurrence, on a bien que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1) < 0$, donc la suite (u_n) est décroissante.

Comme elle est de plus minorée par 0, elle converge vers un réel ℓ . De plus, par passage à la limite dans la formule de récurrence, on obtient que :

$$\ell = \ell e^{-\ell} \implies \ell(1 - e^{-\ell}) = 0 \implies \ell = 0 \text{ ou } e^{-\ell} = 1 \implies \ell = 0$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0 :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

13 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
2. Etudier la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{4 + 3x}$ sur $[0, +\infty[$
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 3$
5. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

1. On a $u_0 = 1 \geq 0$.

De plus, si pour un certain entier n , on a $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n} \geq 0$.

Donc par récurrence, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$$

2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{4 + 3x}$ est bien dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4 + 3x}} > 0$$

3. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a :

$$|f'(t)| = \left| \frac{3}{2\sqrt{4 + 3t}} \right| = \frac{3}{2\sqrt{4 + 3t}} \leq \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in [0, +\infty[, |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|$$

En particulier, pour $x = u_n$ (car $u_n \geq 0$) et $y = 4$ (en remarquant que $f(4) = 4$), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 4| = |f(u_n) - f(4)| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$|u_n - 4| \leq \frac{3}{4}|u_{n-1} - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 |u_{n-2} - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^3 |u_{n-3} - 4| \dots$$

et en réitérant ce raisonnement n fois, on obtient que :

$$|u_n - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 4|$$

Or, $u_0 = 1$, donc $|u_0 - 4| = 3$. On a donc bien montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 3}$$

5. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 4| = 0$, autrement dit que la suite (u_n) converge vers 4 :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4}$$

14 Soit (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n}$$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
2. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

1. Remarquons qu'ici :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n} = \frac{2(u_n + 2) - 3}{2 + u_n} = 2 - \frac{3}{2 + u_n} = f(u_n)$$

où $\forall x \in]-2, +\infty[$, $f(x) = 2 - \frac{3}{2+x}$ La fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ (composée de deux fonctions décroissantes).

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = 1/2$, donc on a bien :

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$$

Soit $n \geq 0$. Supposons qu'on ait $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Alors, f étant croissante sur $[0, 1]$, on a : $f(0) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(1)$, autrement dit :

$$0 \leq 1/2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1.$$

Par récurrence, on a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

2. La suite (u_n) est donc croissante, et majorée par 1, donc elle converge vers un réel ℓ .

Puisqu'on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$, on a donc nécessairement (par passage à la limite dans l'inégalité) :

$$0 \leq \ell \leq 1$$

De plus, puisqu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n}$ et que $\ell \neq -2$, on peut passer à la limite dans l'égalité et on a :

$$\ell = \frac{2\ell + 1}{2 + \ell} \implies \ell(2 + \ell) = 2\ell + 1 \implies \ell^2 = 1 \implies \ell = 1 \quad (\text{car } \ell \geq 0)$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers 1 :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

15 Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 \geq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 1$
2. La suite (u_n) est-elle monotone ?
3. Montrer par l'absurde que la suite (u_n) diverge.

1. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, « u_n existe et $u_n \geq 1$. ».

- u_0 est par définition donné vérifiant $u_0 \geq 1$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons qu'on ait défini u_n tel que $u_n \geq 1$.

Alors $u_n \neq 0$, donc l'expression $u_n^2 + \frac{2}{u_n}$ a un sens. Ainsi, u_{n+1} existe bien.

De plus, puisque $u_n \geq 1$, on a $u_n^2 \geq 1$ et $\frac{2}{u_n} \geq 0$, donc on a bien $u_{n+1} \geq 1$.

- Par récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{2}{u_n} - u_n = \frac{u_n^3 - u_n^2 + 2}{u_n} = \frac{(u_n + 1)(u_n^2 - 2u_n + 2)}{u_n}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 2 > 0$ (car $\Delta < 0$).

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite (u_n) est donc croissante.

3. Par l'absurde, supposons que la suite (u_n) soit convergente, vers un réel ℓ .

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$, on a donc nécessairement $\ell \geq 1$.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{u_n}$, par passage à la limite (sachant que $\ell \neq 0$ puisque $\ell \geq 1$), on a :

$$\ell = \ell^2 + \frac{2}{\ell} \implies \frac{(\ell + 1)(\ell^2 - 2\ell + 2)}{\ell} = 0 \implies \ell = -1$$

Ce qui est absurde puisque $\ell \geq 1$.

Ainsi, nécessairement, la suite (u_n) est divergente.

Et remarquons que puisqu'elle est croissante, on a donc obligatoirement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que la proposition $\mathcal{P}(n)$: " u_n existe et $u_n \geq 0$ " est vraie.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
On note α la solution positive. Montrer que $\alpha \leq 1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
5. La suite (u_n) converge-t-elle ?

1. Par définition $u_0 = 0$ et donc u_0 existe et $u_0 \geq 0$.

Soit $n \geq 0$ et supposons que pour cet entier n on ait défini un nombre u_n avec $u_n \geq 0$.

Alors $\frac{u_n+1}{u_n+2}$ a un sens (car $u_n \neq -2$), donc u_{n+1} existe, et en tant que quotient de nombres

positifs, on a $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2} \geq 0$.

Par récurrence, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq 0$$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. On a :

$$f(x) = x \iff \frac{x+1}{x+2} = x \iff x^2 + 2x = x + 1 \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

L'équation $f(x) = x$ admet deux solutions, dont : $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \leq \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1$.

3. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^+ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |f'(x)| = \frac{1}{(x+2)^2} \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

4. La fonction f est continue et dérivable sur \mathbb{R}^+ et pour tout $x \geq 0$, $|f'(x)| \leq 1/4$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, |f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{4}|a - b|$$

En particulier pour $a = u_n$ et $b = \alpha$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

5. Par récurrence, on montre alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

Et par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers α .

- 17** 1. Étudier la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \ln(x+1) - x$. En déduire le signe de f .
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n > 0$. La suite (u_n) est-elle monotone? convergente? si oui, préciser sa limite.

1. Pour tout $x \geq 0$, notons $f(x) = \ln(x+1) - x$. La fonction f est dérivable et on a :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} \leq 0$$

La fonction f est donc décroissante sur $[0, +\infty[$. Or, $f(0) = 0$, donc nécessairement :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \leq 0$$

2. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est bien défini et $u_n > 0$.

- Par définition $u_0 = 1 > 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons qu'on ait défini u_n tel que $u_n > 0$.
Alors $u_n + 1 > 1$, donc $\ln(u_n + 1)$ a bien un sens, u_{n+1} est défini.
De plus, $\ln(u_n + 1) > \ln(1) = 0$, donc $u_{n+1} > 0$.
- Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 0$.

Étudions la monotonie de (u_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \ln(u_n + 1) - u_n = f(u_n) \leq 0$$

donc (u_n) est décroissante.

De plus, (u_n) est minorée par 0, donc (u_n) converge vers un réel ℓ .

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, on a nécessairement $\ell \geq 0$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$, donc par passage à la limite (on a bien $\ell + 1 > 0$), on a :

$$\ell = \ln(\ell + 1) \implies \ln(\ell + 1) - \ell = 0 \implies f(\ell) = 0 \implies \ell = 0$$

La suite (u_n) converge donc vers 0.

18 Soit f la fonction définie sur $I = [0, 1]$ par $f(x) = 1 - x^2$.

1. Montrer que $[0, 1]$ est stable par f . En déduire que si $u_0 \in I$, la suite (u_n) donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.
2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0, 1]$ pouvant être limite de la suite (u_n) .
3. On suppose $u_0 \in]0, \alpha[$.
 - (a) Étudier le signe de $f \circ f(x) - x$ pour tout $x \in [0, 1]$.
 - (b) On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Étudier la monotonie de (v_n) . Quelle est sa limite ? La suite (u_n) converge-t-elle ?

1. Si $x \in [0, 1]$, alors $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$, donc $f(x) \in [0, 1]$.
L'intervalle $[0, 1]$ est donc stable par f .

Par récurrence, si $u_0 \in I$, alors la suite donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est alors bien définie et on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

2. Supposons que la suite (u_n) converge vers un réel α .
Alors puisque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$, on doit avoir :

$$\alpha = 1 - \alpha^2 \implies \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \implies \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Or, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$, on doit avoir $0 \leq \alpha \leq 1$, donc nécessairement :

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Si la suite (u_n) converge, cela ne peut être que vers $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

3. (a) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} f \circ f(x) - x &= f(1 - x^2) - x = 1 - (1 - x^2)^2 - x = (1 - x) - (1 - x)^2(1 + x)^2 = (1 - x)(1 - (1 - x)(1 + x)^2) \\ &= (1 - x)(x^3 + x^2 - x) = x(1 - x)(x^2 + x - 1) \end{aligned}$$

Le signe de $x(1 - x)$ est toujours positif, donc $f \circ f(x) - x$ est toujours du signe de $x^2 + x - 1$.

Donc :

$$\forall x \in]0, \alpha[, f \circ f(x) - x < 0, \quad \forall x \in]\alpha, 1[, f \circ f(x) - x > 0$$

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n}$. On a donc $v_{n+1} = u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) = f \circ f(v_n)$.

Remarquons déjà que l'intervalle $]0, \alpha[$ est stable par $f \circ f$.

Si $v_0 = u_0 \in]0, \alpha[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n} \in]0, \alpha[$.

De plus, on sait que pour tout $x \in]0, \alpha[, f \circ f(x) - x < 0$, donc (v_n) est décroissante.

La suite (v_n) est donc décroissante, et minorée par 0, elle converge. Mais puisque $v_0 < \alpha$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0 < \alpha$, donc (v_n) ne peut pas converger vers la valeur α (elle converge vers 0 ici).

Ainsi, la suite (u_n) ne peut pas converger (car si elle converge, c'est nécessairement vers α , et alors toutes les suites extraites devraient converger vers α également).

19 Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2\sqrt{n}$.
2. Montrer que : $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(n)$
3. Montrer que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$
4. Montrer que : $u_n - \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$
5. Montrer que : $u_n - \sqrt{n} - \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{8\sqrt{n}}$

1. On a bien $u_0 \leq 0$.

On a de plus $u_1 = \sqrt{1} = 1 \leq 2$.

Pour $n \geq 1$, si on suppose $u_n \leq 2\sqrt{n}$, alors :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} \leq \sqrt{n + 2\sqrt{n} + 1} = \sqrt{(\sqrt{n} + 1)^2} = \sqrt{n} + 1 \leq 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$$

Ainsi, par récurrence, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2\sqrt{n}}$$

2. D'après l'inégalité précédente, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} \implies \forall n \geq 1, 0 \leq \frac{u_n}{n} \leq 2\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Donc par encadrement, on en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$, autrement dit :

$$\boxed{u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(n)}$$

3. On en déduit que lorsque n devient grand :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n+1}$$

Ainsi puisque $u_k \sim \sqrt{k}$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, on a bien :

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}}$$

4. On a :

$$u_{n+1} - \sqrt{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} - \sqrt{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + n + 1} + \sqrt{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

On a donc bien :

$$\boxed{u_n - \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}}$$

5. On a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - \sqrt{n+1} - \frac{1}{2} &= \sqrt{n+1+u_n} - \left(\sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{(n+1+u_n) - \left(\sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right)^2}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{n+1+u_n - \left((n+1) + \frac{1}{4} + \sqrt{n+1} \right)}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{u_n - \sqrt{n+1} - \frac{1}{4}}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Or, on a :

$$u_n - \sqrt{n+1} - \frac{1}{4} = (u_n - \sqrt{n}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \frac{1}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

et

$$\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n+1}$$

Donc par quotient :

$$u_{n+1} - \sqrt{n+1} - \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{8\sqrt{n+1}}$$

autrement dit :

$$\boxed{u_n - \sqrt{n} - \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{8\sqrt{n}}}$$

20 Soit la suite (t_n) définie par $t_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = \frac{t_n}{1 + nt_n^2}$.

1. Etudier la monotonie de la suite (t_n) .
2. Montrer que (t_n) converge et déterminer sa limite.

1. Remarquons déjà que, par une récurrence rapide, on a $\forall n \in \mathbb{N}, t_n > 0$.

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{1 + nt_n^2} < 1$$

La suite (t_n) est donc décroissante.

2. La suite (t_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers un réel ℓ tel que $\ell \geq 0$.

Si $\ell \neq 0$, alors $nt_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, et alors par passage à la limite on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = \frac{t_n}{1 + nt_n^2} \implies \ell = 0$$

Ce qui est absurde puisqu'on avait supposé $\ell \neq 0$.

Finalement, on a donc nécessairement $\ell = 0$. La suite (t_n) converge vers 0.

21 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle à expliciter.
2. Montrer que pour tout entier positif n , l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera u_n .
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
4. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
5. En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

1. La fonction f est continue (somme de fonctions continues) et strictement croissante (somme de fonctions strictement croissantes), donc réalise une bijection de \mathbb{R} vers $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[=]-\infty, +\infty[$.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, puisque $n \in]-\infty, +\infty[= f(\mathbb{R})$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans \mathbb{R} d'après la question 1, notée u_n . Remarquons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = n \iff u_n = f^{-1}(n)$$

3. La fonction f étant bijective continue et strictement croissante, la fonction réciproque f^{-1} est également continue et strictement croissante. Alors :

$$n < n + 1 \implies f^{-1}(n) < f^{-1}(n + 1) \implies u_n < u_{n+1}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

4. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on a également $\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = +\infty$. Ainsi :

$$u_n = f^{-1}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

5. Notons que, par définition, pour $n \geq 1$:

$$e^{u_n} + u_n = n = e^{u_n} \left(1 + \frac{u_n}{e^{u_n}}\right)$$

Ainsi, en composant par \ln , on obtient :

$$u_n + \ln \left(1 + \frac{u_n}{e^{u_n}}\right) = \ln(n)$$

Or, comme $u_n \rightarrow +\infty$, on a $\frac{u_n}{e^{u_n}} \rightarrow 0$ (par croiss.comp.), donc le terme de gauche est équivalent à u_n dans ce qui précède, d'où :

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)}$$

22 Soit pour tout entier $n \geq 1$, f_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0, f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$, qui appartient à $]0, 1]$. On notera x_n cette solution.
2. Montrer que (x_n) est décroissante.
3. En déduire que (x_n) converge vers 0.
4. Montrer que pour $n \geq 3, x_n > \frac{1}{n}$.
5. Etudier le signe de $x - \ln(x)$ et en déduire que $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. La fonction f_n est clairement continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ vers $f_n(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$.

Puisque $0 \in f_n(]0, +\infty[)$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement une solution dans $]0, +\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x_{n+1}) = nx_{n+1} + \ln(x_{n+1}) = (n+1)x_{n+1} + \ln(x_{n+1}) - x_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) - x_{n+1} = -x_{n+1} < 0$$

Ainsi, $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$ et puisque f_n est croissante, on en déduit que $x_{n+1} < x_n$.

La suite (x_n) est donc décroissante.

3. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

Si jamais on avait $\ell > 0$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, nx_n + \ln(x_n) = 0 \implies x_n = \frac{-\ln(x_n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\ln(\ell)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 : \text{contradiction}$$

Donc la seule possibilité est que $\ell = 0$.

4. On a :

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \ln(n) < 0 \text{ car } n \geq 3$$

D'où :

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) < f_n(x_n) \implies \boxed{\frac{1}{n} < x_n}$$

5. Pour tout $x > 0$, on sait que $\ln(x) \leq x - 1 < x$, donc $x - \ln(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

On a alors :

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n\frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} - \ln(\sqrt{n}) > 0$$

D'où :

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > f_n(x_n) \implies \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}} > x_n}$$

23 Pour $n \geq 3$ et $x \in [0, n]$, on note : $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction f_n sur $[0, n]$.
 (b) En déduire que l'équation $x^n = e^x$ a une unique solution dans l'intervalle $[0, n]$. On note u_n cette solution.
2. Montrer que $\forall n \geq 3, u_n > 1$.
3. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose : $v_n = u_n - 1$. Montrer que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

1. (a) Soit $n \geq 3$. La fonction f_n est bien dérivable sur $[0, n]$ et on a :

$$\forall x \in [0, n], f'_n(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = (n-x)x^{n-1}e^{-x}$$

x	0	n
$f'_n(x)$	+	
$f_n(x)$	-1	$(n/e)^n - 1$

(b) D'après les tableaux de variations donnés dans la question précédente, pour tout $n \geq 3$, la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[0, n]$.

Elle réalise donc une bijection entre $[0, n]$ et $[f(0), f(n)] = [-1, (n/e)^n - 1]$.

Or, puisque $n \geq 3, \frac{n}{e} > 1$, donc $(n/e)^n - 1 > 0$.

Puisque $0 \in [-1, (n/e)^n - 1]$, il existe donc un unique $u_n \in]0, n[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2. On a $f_n(1) = e^{-1} - 1 < 0$, donc $f_n(1) < f_n(u_n)$ et par stricte croissance de f_n sur $[0, n]$, on a alors $1 < u_n$.

3. Pour tout $n \geq 3$, on a :

$$f_n(u_{n+1}) = (u_{n+1})^n e^{-u_{n+1}} - 1 = \frac{1}{u_{n+1}} \times ((u_{n+1})^{n+1} e^{-u_{n+1}}) - 1 = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 < 0$$

On a donc $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$ et par stricte croissance de f_n sur $[0, n]$, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$.

La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est donc (strictement) décroissante.

4. La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est donc décroissante et minorée par 1, elle converge vers un réel ℓ qui doit vérifier $\ell \geq 1$. Or, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n)^n e^{-u_n} = 1 \implies n \ln(u_n) - u_n = 0 \implies \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{n} \quad (\text{car } \ell \neq 0)$$

On en déduit donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 0$, ce qui prouve que :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

5. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$, donc :

$$\ln(v_n + 1) = \frac{v_n + 1}{n}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, on a $\ln(1 + v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $1 + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, d'où :

$$\boxed{v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

24 Pour un entier $n \geq 3$, on pose $f_n(x) = x - n \ln(x)$ pour $x > 0$.

1. Dresser le tableau de variations de f_n et esquisser son graphe.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions sur \mathbb{R}_+^* .

On note u_n la plus petite solution de $f_n(x) = 0$ sur \mathbb{R}_+^* .

3. Montrer que (u_n) est décroissante, et converge vers 1.
4. On pose $u_n = 1 + v_n$. Montrer que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

1. La fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $\forall x > 0, f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x - n}{x}$. La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $]0, n[$ puis strictement croissante sur $]n, +\infty[$.

On a clairement $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$.

Pour la limite en $+\infty$, on a : $f_n(x) = x - n \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

x	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	\emptyset	+
$f_n(x)$	$+\infty$	$n(1 - \ln(n))$	$+\infty$

2. La fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $]0, n[$, donc réalise une bijection de $]0, n[$ vers $f_n(]0, n[) =]n(1 - \ln(n)), +\infty[$. Comme $0 \in f_n(]0, n[)$ (car $1 - \ln(n) < 0$ puisque $n \geq 3 > e$), l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0, n[$.
De même, la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]n, +\infty[$, donc réalise une bijection de $]n, +\infty[$ vers $f_n(]n, +\infty[) = [n(1 - \ln(n)), +\infty[$. Comme $0 \in f_n(]n, +\infty[)$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]n, +\infty[$.
3. Soit $n \geq 3$. Remarquons que $f_n(1) = 1 > 0$, donc nécessairement sur l'intervalle $]0, n[$, $f_n(1) = 1$ et $f_n(u_n) = 0$, f_n étant strictement décroissante, on a donc $1 < u_n < n$:

$$\forall n \geq 3, \quad 1 < u_n < n$$

Soit $n \geq 3$.

La fonction f_{n+1} est décroissante sur $]0, n + 1[$ et on sait que f_{n+1} s'annule en u_{n+1} sur cet intervalle. De plus,

$$f_{n+1}(u_n) = u_n - (n + 1) \ln(u_n) = f_n(u_n) - \ln(u_n) = -\ln(u_n) < 0$$

On a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, avec f_{n+1} décroissante sur $]0, n + 1[$ et u_n, u_{n+1} appartenant tous deux à cet intervalle, donc $u_n > u_{n+1}$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

La suite (u_n) étant minorée par 1 et décroissante, elle converge vers un réel $\ell \geq 1$. Or, on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n \ln(u_n) \implies \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

La suite (u_n) converge donc bien vers 1.

4. On pose $u_n = 1 + v_n$, autrement dit, (v_n) converge vers 0. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n \ln(u_n) \implies n \ln(1 + v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \implies nv_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \implies v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

25 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \mapsto -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique x_n dans $]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

(b) Montrer que $1 + \ln(1 - x_n) + \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.

1. Soit $n \geq 2$. La fonction f_n est continue sur $]0, 1[$ (c'est une fonction polynomiale).

De plus, f_n est dérivable et $\forall x \in]0, 1[, f'_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} > 0$, la fonction f_n est donc strictement croissante sur $]0, 1[$.

Étant continue et strictement croissante, f_n réalise donc une bijection de $]0, 1[$ vers $f_n(]0, 1[)$.

Or, $f_n(]0, 1[) =]f_n(0), f_n(1)[= \left] -1, \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right[$.

Comme $0 \in f_n(]0, 1[)$, il existe un unique réel $x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. (a) Soit $n \geq 2$.

On a $f_n(x_{n+1}) = -1 + x_{n+1} + \frac{x_{n+1}^2}{2} + \dots + \frac{x_{n+1}^n}{n} = f_{n+1}(x_{n+1}) - \frac{x_{n+1}^{n+1}}{n+1} = -\frac{x_{n+1}^{n+1}}{n+1} < 0$.

On a donc $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$ donc $x_{n+1} < x_n$ (puisque f_n est strictement croissante sur $]0, 1[$, avec $x_n \in]0, 1[$ et $x_{n+1} \in]0, 1[$).

Finalement, la suite (x_n) est donc décroissante.

Remarquons que, étant décroissante et minorée, la suite (x_n) est donc convergente.

(b)

$$\begin{aligned} 1 + \ln(1 - x_n) + \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t} dt &= 1 - \int_0^{x_n} \frac{1}{1-t} dt + \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t} dt = 1 - \int_0^{x_n} \frac{1-t^n}{1-t} dt \\ &= 1 - \int_0^{x_n} \sum_{k=0}^{n-1} t^k dt = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_n^{k+1}}{k+1} = f_n(x_n) = 0 \end{aligned}$$

De plus, remarquons que :

pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x_n} \int_0^{x_n} t^n dt \leq \frac{1}{1-x_0} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{1-x_0} \times \frac{1}{n+1}$$

Par encadrement, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

On doit donc avoir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 - x_n) = -1$$

donc :

$$1 - x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-1}, \quad \text{autrement dit} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - e^{-1}$$