**1** Calculer le terme général des suites $(u_n)$ suivantes :

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$.
2. $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 5$, $u_1 = 13$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$
4. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

1. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique associée :

$$x^2 = -2x - 1 \iff x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x = -1$$

Il existe donc deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(-1)^n + \mu\ n(-1)^n$$

Avec les conditions initiales, on a $\begin{cases} \lambda = 1 \\ -\lambda - \mu = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -5 \end{cases}$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n(1 - 5n)}$$

2. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 2x - 4 \iff x^2 - 2x + 4 = 0 \overset{\Delta=-12}{\iff} x = \frac{2 \pm i2\sqrt{3}}{2} \iff x = 1 \pm i\sqrt{3} \iff x = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

Il existe donc deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 2^n \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \mu\ 2^n \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$

Avec les conditions initiales, on a $\begin{cases} \lambda = 2 \\ 2.\frac{1}{2}.\lambda + 2\frac{\sqrt{3}}{2}.\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)}$$

3. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 4x + 5 \iff x^2 - 4x - 5 = 0 \overset{\Delta=36}{\iff} x = \frac{4 \pm 6}{2} \iff x = 5 \text{ ou } \ x = -1$$

Il existe donc deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\ 5^n + b\ (-1)^n.$$

Avec les conditions initiales, on a $\begin{cases} a + b = 5 \\ 5a - b = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 5^n + 2(-1)^n}$$

4. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 3x - 2 \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \overset{\Delta=1}{\iff} x = \frac{3 \pm 1}{2} \iff x = 2 \text{ ou } \ x = 1$$

   Il existe donc deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 2^n + \mu 1^n = \lambda 2^n + \mu$$

   Avec les conditions initiales, on a $\left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = 2 \\ 2\lambda + \mu = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{array} \right.$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1}$$

**2** Soit $M$ la matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ contenant uniquement des 1, sauf des 0 sur la diagonale.

1. Montrer que $M$ est inversible et déterminer $M^{-1}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, M^k = \alpha_k M + \beta_k I$ où $(\alpha_k)$ est récurrente linéaire double et où $\beta_k = (n-1)\alpha_k$.

1. Si $J$ désigne la matrice d'ordre $n$ qui contient uniquement des 1, on a donc :

$$M = J - I$$

Il est facile de voir que $J^2 = nJ$, donc :

$$M^2 = (J-I)^2 = J^2 - 2J + I = (n-2)J + I = (n-2)(M+I) + I = (n-2)M + (n-1)I$$

La matrice $M$ est donc inversible car on a :

$$M\left(\frac{1}{n-1}M - \frac{n-2}{n-1}I\right) = I$$

et $M^{-1} = \dfrac{1}{n-1}M - \dfrac{n-2}{n-1}I$.

2. Puisque $M^2 \in Vect(M, I)$, il est alors facile de vérifier par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = \alpha_k M + \beta_k I$$

avec $\alpha_k$ et $\beta_k$ à déterminer.
En effet, on a $M^0 = 0.M + 1.I$, $M^1 = 1.M + 0.I$, $M^2 = (n-2)M + (n-1)I$.

Soit $k \geqslant 0$. Si $M^k = \alpha_k M + \beta_k I$, alors on a :

$$M^{k+1} = M.M^k = \alpha_k M^2 + \beta_k M = \alpha_k(n-2)M + \alpha_k(n-1)I + \beta_k M = \Big[(n-2)\alpha_k + \beta_k\Big]M + [(n-1)\alpha_k]I$$

On voit donc qu'on a donc encore $M^{k+1} = \alpha_{k+1}M + \beta_{k+1}I$, en posant :

$$\alpha_{k+1} = (n-2)\alpha_k + \beta_k \qquad \text{et} \qquad \beta_{k+1} = (n-1)\alpha_k$$

On a alors :

$$\alpha_{k+2} = (n-2)\alpha_{k+1} + (n-1)\alpha_k$$

La suite $(\alpha_k)$ est donc récurrente linéaire double, d'équation caractéristique
$x^2 - (n-2)x - (n-1) = 0$, de solutions $-1$ et $n-1$ :

$$\alpha_k = \lambda(n-1)^k + \mu(-1)^k$$

On trouve facilement que $\lambda = 1/n$ et $\mu = -1/n$, d'où :

$$\alpha_k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}$$

et alors :

$$M^k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}M + \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n}I$$

**3** 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1-2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & u_n+1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $(u_n)$ est arithmético-géométrique. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

1. Posons $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors : $\boxed{A = I + 3J}$.

   La question est de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists u_n \in \mathbb{R} \ /\ A^n = I_3 + u_n J$$

   - Pour $n = 0$, il suffit de poser $u_0 = 0$. On a alors $A^0 = I_3 = I_3 + u_0 J$.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons qu'il existe un réel $u_n$ tel que $A^n = I_3 + u_n J$. Alors :

$$A^{n+1} = A^n \times A = (I_3 + u_n J)(I_3 + 3J) = I_3 + (u_n + 3)J + 3u_n J^2$$

   Or, $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -J$, donc on a :

$$A^{n+1} = I_3 + (u_n+3)J - 3u_n J = I_3 + (-2u_n + 3)J = I_3 + u_{n+1} J \quad \text{en posant } u_{n+1} = -2u_n + 3$$

   - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel $u_n$ tel que $A^n = I_3 + u_n J$.

2. Par construction de $(u_n)$, on a vu que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \qquad \text{et} \qquad u_0 = 0$$

   La suite $(u_n)$ est donc arithmético-géométrique.
   L'équation caractéristique associée est $x = -2x + 3 \iff x = 1$.
   La suite $(u_n - 1)$ est donc géométrique de raison $-2$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 1 = (-2)^n (u_0 - 1) \Longrightarrow u_n = 1 - (-2)^n$$

   Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = I_3 + \left(1 - (-2)^n\right) J}$$

**4** Calculer les limites suivantes, en utilisant éventuellement les DL usuels en 0 :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+2}-n)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-3)\ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
8. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+n^2)^{1/n}$
9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\ln n)^2+3n+1}{\ln(n)+5}$
10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^n}{n!}$

1. $\sqrt{n^2+2}-n=\dfrac{(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)}{\sqrt{n^2+2}+n}=\dfrac{(n^2+2)-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n}=\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\boxed{0}$
2. $\dfrac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}=\dfrac{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\boxed{1}$.
3. $$\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}=\frac{(n^2+n+1)-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{2}{2}=\boxed{1}$$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{n^2}\times\dfrac{n(n+1)}{2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n^2}{2n^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\boxed{\dfrac{1}{2}}$
5. $$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\exp\left(n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\quad\text{car }\boxed{\ln(1+x)\underset{x\to0}{=}x+o(x)}\\&=\exp(1+o(1))\\&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\boxed{e}\end{aligned}$$
6. Toujours en utilisant $\boxed{\ln(1+x)=x+o(x)}$ lorsque $x\to0$, on a :

$$(2n-3)\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)=(2n-3)\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right)=(2n-3)\left(\frac{1}{n+2}+o\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2n-3}{n+2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\boxed{2}$$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a $\sqrt{n^2}\leqslant\sqrt{n^2+k}\leqslant\sqrt{n^2+n}$, donc :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

Donc en sommant les inégalités :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2}}$$

Or, $\frac{n}{\sqrt{n^2}}=1$ et $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{\sqrt{n^2}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$, donc par théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

8.
$$\left(1+n^2\right)^{1/n}=\exp\left(\frac{1}{n}\ln(1+n^2)\right)$$

Or,

$$\frac{\ln(1+n^2)}{n}=\frac{\ln(n^2(1+\frac{1}{n^2}))}{n}=2\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

donc :

$$\left(1+n^2\right)^{1/n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^0=\boxed{1}$$

9.
$$\frac{(\ln n)^2+3n+1}{\ln(n)+5}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{3n}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\boxed{+\infty}\quad\text{(croissances comparées)}$$

10. Posons pour tout $n\geqslant1$, $u_n=\frac{n^n}{n!}$.
On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e$$

Comme $e>2$, on peut donc dire qu'il existe un rang $k$ tel que : $\forall n\geqslant k,\ \frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant2\Longrightarrow u_{n+1}\geqslant2u_n$.
Alors, pour tout $n\geqslant k$, on a :

$$u_n\geqslant2u_{n-1}\geqslant2^2u_{n-2}\geqslant2^3u_{n-3}\geqslant\cdots\geqslant2^{n-k}u_k$$

On a donc :

$$\forall n\geqslant k,\ u_n\geqslant2^n\times\frac{u_k}{2^k}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$, donc par comparaison on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

**5** Déterminer un équivalent simple des suites suivantes, en utilisant éventuellement les DL usuels en 0 :

1. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
2. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $w_n = \ln(1+n^3)$
4. $x_n = \dfrac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}{n+1}$
5. $y_n = \dbinom{n}{k}$ (pour $k$ fixé).
6. $z_n = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{n^2}\right) \ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)}{\left(e^{1/n} - e^{-1/n}\right)\left(\left(\dfrac{1}{n}+1\right)^5 - 1\right)}$.

1. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{2}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{2}{n^2}}$
2. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \dfrac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{2\sqrt{n}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$
3. $w_n = \ln(1+n^3) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n^3) = \boxed{3\ln(n)}$
4. En utilisant les DL $\ln(1+x) = x + o(x)$ et $\sin(x) = x + o(x)$, on en déduit que $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$ et $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, on a donc :
$$x_n = \frac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{n} = \boxed{\frac{1}{n^2}}$$
5. Pour $k$ fixé et $n \geqslant k$, on a :
$$y_n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{n^k}{k!}}$$
6. On a $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
En utilisant successivement $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$ et $\cos(x) - 1 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on a :
$$\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} = \frac{-1}{2n^2}$$
En utilisant $e^x = 1 + x + o(x)$, on a :
$$e^{1/n} - e^{-1/n} = \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$
Et enfin en utilisant $(1+x)^5 - 1 \underset{x\to0}{\sim} 5x$, on a :
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{n}$$

Finalement par produit et quotient, on a :

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{-1}{2n^2}\right)}{\frac{2}{n} \times \frac{5}{n}} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{4n^2}}{\frac{10}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{-\sqrt{3}}{40}}$$

**6** 1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{2^{n-1}}{n!} \leqslant 1$.

2. On note : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Montrer que $(S_n)$ converge vers un réel $\ell$ tel que $2 < \ell \leqslant 3$.

1. Pour $n \geqslant 1$, $\frac{2^{n-1}}{n!} = \left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2}{n-1}\right)\cdots\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{2}\right) \leqslant 1$ (on a un produit de $n-1$ réels positifs inférieurs à 1).
2. Soit $n \geqslant 1$. On peut écrire que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leqslant 3$$

Remarquons que la suite $(S_n)$ est clairement croissante (somme de termes positifs), et comme $S_2 = 5/2$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{5}{2} \leqslant S_n \leqslant 3$$

La suite $(S_n)$ est donc croissante et majorée, elle converge vers un réel $\ell$, et en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$2 < \frac{5}{2} \leqslant \ell \leqslant 3$$

$\boxed{7}$ Soit $(S_n)$ la suite définie par : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes. Qu'en déduire sur $(S_n)$ ?

Notons pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$

- Pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geqslant 0$$

  La suite $(u_n)$ est donc croissante.

- Pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \leqslant 0$$

  La suite $(v_n)$ est donc décroissante.

- Pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont donc adjacentes. On en déduit alors que les suite $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ convergent toutes les deux vers une même limite, et on en déduit finalement que la suite $(S_n)$ converge.

**8** On note pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la limite de $(S_n)$.
3. On pose $T_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que $(T_n)$ converge. En déduire un équivalent de $S_n$ lorsque $n \to +\infty$.

1. Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Or, $2\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$, donc : $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$, ce qui fournit l'encadrement souhaité.

2. La réponse de la question précédente peut aussi s'écrire :

$$\forall k \geqslant 1, \quad 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

(l'inégalité de droite est bien vraie également pour $k = 1$ car on a bien « $1 \leqslant 2$ »).
En sommant les inégalités pour $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient :

$$2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leqslant S_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

autrement dit :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n \leqslant 2\sqrt{n}$$

Par comparaison (dans l'inégalité de gauche), on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$$

3. $$T_{n+1} - T_n = S_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - S_n + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant 0$$

La suite $(T_n)$ est donc décroissante.
De plus, d'après l'encadrement de la question 2 :

$$2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \leqslant T_n \leqslant 0$$

Or, on a :

$$2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2$$

donc il existe un rang $N$ à partir duquel on a : $\forall n \geqslant N,\ -3 < 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n}$.Ainsi :

$$\forall n \geqslant N,\ -3 < T_n$$

La suite $(T_n)$ est donc décroissante, et au moins à partir d'un certain rang, deviendra minorée par $-3$, donc converge. Il existe donc un réel $\ell$ tel que :

$$T_n = S_n - 2\sqrt{n} = \ell + o(1)$$

Autrement dit :

$$S_n = 2\sqrt{n} + \ell + o(1) \Longrightarrow \boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$$

**9** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de réels strictement positifs.

On suppose que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

1. Montrer que si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$
2. Montrer que si $v_n \to 0$, alors $u_n \to 0$.

1. Remarquons que puisque les deux suites sont strictement positives, en composant par le logarithme, on obtient :
$$\forall k \geqslant 0, \quad \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) \leqslant \ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)$$
En sommant ces inégalités pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient :
$$\ln(u_n) - \ln(u_0) \leqslant \ln(v_n) - \ln(v_0)$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = +\infty$, donc par comparaison, $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc :
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$
2. En reprenant les inégalités précédentes, on a :
$$\forall n \geqslant 1,\ \ln(u_n) - \ln(u_0) \leqslant \ln(v_n) - \ln(v_0)$$
Si $(v_n)$ converge vers 0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty$, donc par comparaison, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$, donc :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

**10** Soit $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

La suite $(u_n)$ est croissante car : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$.
Ainsi, soit $(u_n)$ converge, soit $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.
Si la suite $(u_n)$ convergeait vers un réel $\ell$, alors par passage à la limite dans l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$$

on obtiendrait que $\ell = \ell + e^{-\ell}$, autrement dit $e^{-\ell} = 0$, ce qui est impossible.
Ainsi, nécessairement la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

**11** Soit $(u_n)$ définie par $u_0 = 1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\mathcal{P}(n)$ : « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ »est vraie.

   — $n = 0$, $u_0 = 1/2$ : c'est dans l'énoncé, donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   — Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que pour cet entier $n$, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, i.e. que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également.

   On a $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.
   Comme $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a aussi $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$, donc par produit $0 \leqslant u_n(1-u_n) \leqslant 1$, ainsi, on a bien $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également.
   — Par récurrence, la propriété est donc bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$$
   donc la suite $(u_n)$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0, la suite $(u_n)$ est convergente vers un réel $\ell$ tel que $\ell \geqslant 0$.

   Puisqu'on a la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$$
   par passage à la limite dans cette égalité, le nombre $\ell$ doit nécessairement vérifier
$$\ell = \ell - \ell^2$$
   ce qui nous donne donc que $\ell^2 = 0$, soit $\ell = 0$.
   Ainsi, la suite $(u_n)$ converge vers 0.
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

**12** Soit $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

1. On procède par récurrence.
   $u_0 = 1$, donc on a bien $u_0 > 1$.
   De plus, si pour un certain entier $n$, on a $u_n > 0$, alors par produit $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0$.
   Ainsi, par récurrence, on a bien que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1) < 0$, donc la suite $(u_n)$ est décroissante.
   Comme elle est de plus minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell$. De plus, par passage à la limite dans la formule de récurrence, on obtient que :
   $$\ell = \ell e^{-\ell} \Longrightarrow \ell(1 - e^{-\ell}) = 0 \Longrightarrow \ell = 0 \text{ ou } e^{-\ell} = 1 \Longrightarrow \ell = 0$$
   Ainsi, la suite $(u_n)$ converge vers 0 :
   $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

**13** Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.
2. Etudier la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{4+3x}$ sur $[0,+\infty[$
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - 4|$
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 4| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 3$
5. En déduire que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

1. On a $u_0 = 1 \geqslant 0$.
   De plus, si pour un certain entier $n$, on a $u_n \geqslant 0$, alors $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \geqslant 0$.
   Donc par récurrence, on a bien :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$$
2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{4+3x}$ est bien dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a :
   $$\forall x \geqslant 0,\ f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4+3x}} > 0$$
3. La fonction $f$ est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a :
   $$|f'(t)| = \left|\frac{3}{2\sqrt{4+3t}}\right| = \frac{3}{2\sqrt{4+2t}} \leqslant \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$$
   Donc d'après l'inégalité des accroissements finis :
   $$\forall x, y \in [0,+\infty[, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{3}{4}|x-y|$$
   En particulier, pour $x = u_n$ (car $u_n \geqslant 0$) et $y = 4$ (en remarquant que $f(4) = 4$), on obtient :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 4| = |f(u_n) - f(4)| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - 4|$$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc :
   $$|u_n - 4| \leqslant \frac{3}{4}|u_{n-1} - 4| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^2 |u_{n-2} - 4| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^3 |u_{n-3} - 4| \dots$$
   et en réitérant ce raisonnement $n$ fois, on obtient que :
   $$|u_n - 4| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 4|$$
   Or, $u_0 = 1$, donc $|u_0 - 4| = 3$. On a donc bien montré que :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 4| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 3}$$
5. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 4| = 0$, autrement dit que la suite $(u_n)$ converge vers 4 :
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 4}$$

**14** Soit $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n}$$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. En déduire que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

1. Remarquons qu'ici :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n} = \frac{2(u_n + 2) - 3}{2 + u_n} = 2 - \frac{3}{2 + u_n} = f(u_n)$$

   où $\forall x \in ]-2, +\infty[,\ f(x) = 2 - \frac{3}{2+x}$ La fonction $f$ est croissante sur $[0, +\infty[$ (composée de deux fonctions décroissantes).
   Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = 1/2$, donc on a bien :

$$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$$

   Soit $n \geqslant 0$. Supposons qu'on ait $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   Alors, $f$ étant croissante sur $[0, 1]$, on a : $f(0) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(1)$, autrement dit:

$$0 \leqslant 1/2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1.$$

   Par récurrence, on a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

2. La suite $(u_n)$ est donc croissante, et majorée par 1, donc elle converge vers un réel $\ell$.
   Puisqu'on a montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a donc nécessairement (par passage à la limite dans l'inégalité) :

$$0 \leqslant \ell \leqslant 1$$

   De plus, puisqu'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{2+u_n}$ et que $\ell \neq -2$, on peut passer à la limite dans l'égalité et on a :

$$\ell = \frac{2\ell + 1}{2 + \ell} \Longrightarrow \ell(2 + \ell) = 2\ell + 1 \Longrightarrow \ell^2 = 1 \Longrightarrow \ell = 1 \quad (\text{car } \ell \geqslant 0)$$

   Ainsi, la suite $(u_n)$ converge vers 1 :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

**15** Soit $(u_n)$ la suite définie par son premier terme $u_0 \geqslant 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien défini et $u_n \geqslant 1$
2. La suite $(u_n)$ est-elle monotone ?
3. Montrer par l'absurde que la suite $(u_n)$ diverge.

1. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, « $u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$. ».
   - $u_0$ est par définition donné vérifiant $u_0 \geqslant 1$.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons qu'on ait défini $u_n$ tel que $u_n \geqslant 1$.

     Alors $u_n \neq 0$, donc l'expression $u_n^2 + \dfrac{2}{u_n}$ a un sens. Ainsi, $u_{n+1}$ existe bien.

     De plus, puisque $u_n \geqslant 1$, on a $u_n^2 \geqslant 1$ et $\dfrac{2}{u_n} \geqslant 0$, donc on a bien $u_{n+1} \geqslant 1$.
   - Par récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$.
2. $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{2}{u_n} - u_n = \frac{u_n^3 - u_n^2 + 2}{u_n} = \frac{(u_n+1)(u_n^2 - 2u_n + 2)}{u_n}$$

   Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, et $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 0$ (car $\Delta < 0$).
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, la suite $(u_n)$ est donc croissante.
3. Par l'absurde, supposons que la suite $(u_n)$ soit convergente, vers un réel $\ell$.

   Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$, on a donc nécessairement $\ell \geqslant 1$.

   Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{u_n}$, par passage à la limite (sachant que $\ell \neq 0$ puisque $\ell \geqslant 1$), on a :

   $$\ell = \ell^2 + \frac{2}{\ell} \Longrightarrow \frac{(\ell+1)(\ell^2 - 2\ell + 2)}{\ell} = 0 \Longrightarrow \ell = -1$$

   Ce qui est absurde puisque $\ell \geqslant 1$.

   Ainsi, nécessairement, la suite $(u_n)$ est divergente.
   Et remarquons que puisqu'elle est croissante, on a donc obligatoirement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

**16** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.
Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que la proposition $\mathcal{P}(n)$ : "$u_n$ existe et $u_n \geqslant 0$" est vraie.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   On note $\alpha$ la solution positive. Montrer que $\alpha \leqslant 1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
5. La suite $(u_n)$ converge-t-elle ?

1. Par définition $u_0 = 0$ et donc $u_0$ existe et $u_0 \geqslant 0$.

   Soit $n \geqslant 0$ et supposons que pour cet entier $n$ on ait défini un nombre $u_n$ avec $u_n \geqslant 0$.
   Alors $\dfrac{u_n+1}{u_n+2}$ a un sens (car $u_n \neq -2$), donc $u_{n+1}$ existe, et en tant que quotient de nombres positifs, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{u_n+2} \geqslant 0$.
   Par récurrence, on a bien :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } \ u_n \geqslant 0$$
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. On a :
   $$f(x) = x \iff \frac{x+1}{x+2} = x \iff x^2 + 2x = x + 1 \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
   L'équation $f(x) = x$ admet deux solutions, dont : $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$.
3. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$
   On a donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |f'(x)| = \frac{1}{(x+2)^2} \leqslant \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$
4. La fonction $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geqslant 0$, $|f'(x)| \leqslant 1/4$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :
   $$\forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ |f(a) - f(b)| \leqslant \frac{1}{4}|a - b|$$
   En particulier pour $a = u_n$ et $b = \alpha$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

5. Par récurrence, on montre alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

Et par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

Ainsi, la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

**17** 1. Étudier la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(x+1) - x$. En déduire le signe de $f$.

2. Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est défini et $u_n > 0$. La suite $(u_n)$ est-elle monotone ? convergente ? si oui, préciser sa limite.

1. Pour tout $x \geqslant 0$, notons $f(x) = \ln(x+1) - x$. La fonction $f$ est dérivable et on a :

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} \leqslant 0$$

La fonction $f$ est donc décroissante sur $[0, +\infty[$. Or, $f(0) = 0$, donc nécessairement :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \leqslant 0$$

2. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est bien défini et $u_n > 0$.
   - Par définition $u_0 = 1 > 0$.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons qu'on ait défini $u_n$ tel que $u_n > 0$.
     Alors $u_n + 1 > 1$, donc $\ln(u_n + 1)$ a bien un sens, $u_{n+1}$ est défini.
     De plus, $\ln(u_n + 1) > \ln(1) = 0$, donc $u_{n+1} > 0$.
   - Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 0$.

   Étudions la monotonie de $(u_n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \ln(u_n + 1) - u_n = f(u_n) \leqslant 0$$

   donc $(u_n)$ est décroissante.
   De plus, $(u_n)$ est minorée par 0, donc $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$.
   Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on a nécessairement $\ell \geqslant 0$.

   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$, donc par passage à la limite (on a bien $\ell + 1 > 0$), on a :

$$\ell = \ln(\ell + 1) \Longrightarrow \ln(\ell + 1) - \ell = 0 \Longrightarrow f(\ell) = 0 \Longrightarrow \ell = 0$$

   La suite $(u_n)$ converge donc vers 0.

**18** Soit $f$ la fonction définie sur $I = [0,1]$ par $f(x) = 1 - x^2$.

1. Montrer que $[0,1]$ est stable par $f$. En déduire que si $u_0 \in I$, la suite $(u_n)$ donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.
2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ pouvant être limite de la suite $(u_n)$.
3. On suppose $u_0 \in ]0, \alpha[$.
   (a) Étudier le signe de $f \circ f(x) - x$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (b) On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Étudier la monotonie de $(v_n)$. Quelle est sa limite ? La suite $(u_n)$ converge-t-elle ?

1. Si $x \in [0,1]$, alors $0 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1$, donc $f(x) \in [0,1]$.
   L'intervalle $[0,1]$ est donc stable par $f$.

   Par récurrence, si $u_0 \in I$, alors la suite donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est alors bien définie et on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.
2. Supposons que la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\alpha$.
   Alors puisque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$, on doit avoir :

$$\alpha = 1 - \alpha^2 \Longrightarrow \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

   Or, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on doit avoir $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, donc nécessairement :

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

   Si la suite $(u_n)$ converge, cela ne peut être que vers $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
3. (a) Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$f \circ f(x) - x = f(1-x^2) - x = 1 - (1-x^2)^2 - x = (1-x) - (1-x)^2(1+x)^2 = (1-x)\big(1 - (1-x)(1+x)^2\big)$$

$$= (1-x)(x^3 + x^2 - x) = x(1-x)(x^2 + x - 1)$$

   Le signe de $x(1-x)$ est toujours positif, donc $f \circ f(x) - x$ est toujours du signe de $x^2 + x - 1$.
   Donc :

$$\forall x \in ]0, \alpha[, \; f \circ f(x) - x < 0, \qquad \forall x \in ]\alpha, 1[, \; f \circ f(x) - x > 0$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n}$. On a donc $v_{n+1} = u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) = f \circ f(v_n)$.
   Remarquons déjà que l'intervalle $]0, \alpha[$ est stable par $f \circ f$.
   Si $v_0 = u_0 \in ]0, \alpha[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n} \in ]0, \alpha[$.
   De plus, on sait que pour tout $x \in ]0, \alpha[, f \circ f(x) - x < 0$, donc $(v_n)$ est décroissante.
   La suite $(v_n)$ est donc décroissante, et minorée par 0, elle converge. Mais puisque $v_0 < \alpha$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant v_0 < \alpha$, donc $(v_n)$ ne peut pas converger vers la valeur $\alpha$ (elle converge vers 0 ici).
   Ainsi, la suite $(u_n)$ ne peut pas converger (car si elle converge, c'est nécessairement vers $\alpha$, et alors toutes les suites extraites devraient converger vers $\alpha$ également).

**19** Soit $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2\sqrt{n}$.
2. Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
3. Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$
4. Montrer que : $u_n - \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$
5. Montrer que : $u_n - \sqrt{n} - \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8\sqrt{n}}$

1. On a bien $u_0 \leqslant 0$.
   On a de plus $u_1 = \sqrt{1} = 1 \leqslant 2$.
   Pour $n \geqslant 1$, si on suppose $u_n \leqslant 2\sqrt{n}$, alors :
   $$u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} \leqslant \sqrt{n + 2\sqrt{n} + 1} = \sqrt{(\sqrt{n}+1)^2} = \sqrt{n} + 1 \leqslant 2\sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1}$$
   Ainsi, par récurrence, on a bien :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2\sqrt{n}}$$
2. D'après l'inégalité précédente, on a donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n} \Longrightarrow \forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 2\frac{1}{\sqrt{n}}$$
   Donc par encadrement, on en déduit que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$, autrement dit :
   $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)}$$
3. On en déduit que lorsque $n$ devient grand :
   $$u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n+1}$$
   Ainsi puisque $u_k \sim \sqrt{k}$ lorsque $k \to +\infty$, on a bien :
   $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}}$$
4. On a :
   $$u_{n+1} - \sqrt{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} - \sqrt{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + n + 1} + \sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$
   On a donc bien :
   $$\boxed{u_n - \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}}$$

5. On a:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - \sqrt{n+1} - \frac{1}{2} &= \sqrt{n+1+u_n} - \left(\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(n+1+u_n) - \left(\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{n+1+u_n - \left((n+1) + \frac{1}{4} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{u_n - \sqrt{n+1} - \frac{1}{4}}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Or, on a :

$$u_n - \sqrt{n+1} - \frac{1}{4} = \left(u_n - \sqrt{n}\right) - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - \frac{1}{4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

et

$$\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n+1}$$

Donc par quotient :

$$u_{n+1} - \sqrt{n+1} - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8\sqrt{n+1}}$$

autrement dit :

$$\boxed{u_n - \sqrt{n} - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8\sqrt{n}}}$$

$\boxed{\textbf{20}}$ Soit la suite $(t_n)$ définie par $t_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \dfrac{t_n}{1 + nt_n^2}$.

1. Etudier la monotonie de la suite $(t_n)$.
2. Montrer que $(t_n)$ converge et déterminer sa limite.

1. Remarquons déjà que, par une récurrence rapide, on a $\forall n \in \mathbb{N}, t_n > 0$.
   On a alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{1 + nt_n^2} < 1$$
   La suite $(t_n)$ est donc décroissante.
2. La suite $(t_n)$ est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers un réel $\ell$ tel que $\ell \geqslant 0$.
   <u>Si $\ell \neq 0$</u>, alors $nt_n^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et alors par passage à la limite on aurait :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = \frac{t_n}{1 + nt_n^2} \Longrightarrow \ell = 0$$
   Ce qui est absurde puisqu'on avait supposé $\ell \neq 0$.

   Finalement, on a donc nécessairement $\ell = 0$. La suite $(t_n)$ converge vers 0.

**21** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Montrer que pour tout entier positif $n$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera $u_n$.
3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$.
4. Montrer que la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.
5. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

1. La fonction $f$ est continue (somme de fonctions continues) et strictement croissante (somme de fonctions strictement croissantes), donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = ]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f[ = ]-\infty, +\infty[$.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, puisque $n \in ]-\infty, +\infty[ = f(\mathbb{R})$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ d'après la question 1, notée $u_n$. Remarquons que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = n \Longleftrightarrow u_n = f^{-1}(n)$$
3. La fonction $f$ étant bijective continue et strictement croissante, la fonction réciproque $f^{-1}$ est également continue et strictement croissante. Alors :
$$n < n+1 \Longrightarrow f^{-1}(n) < f^{-1}(n+1) \Longrightarrow u_n < u_{n+1}$$
La suite $(u_n)$ est donc croissante.
4. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on a également $\lim\limits_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = +\infty$. Ainsi :
$$u_n = f^{-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
5. Notons que, par définition, pour $n \geqslant 1$ :
$$e^{u_n} + u_n = n = e^{u_n}(1 + \frac{u_n}{e^{u_n}})$$
Ainsi, en composant par ln, on obtient :
$$u_n + \ln\left(1 + \frac{u_n}{e^{u_n}}\right) = \ln(n)$$
Or, comme $u_n \to +\infty$, on a $\frac{u_n}{e^{u_n}} \to 0$ (par croiss.comp.), donc le terme de gauche est équivalent à $u_n$ dans ce qui précède, d'où :
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

**22** Soit pour tout entier $n \geqslant 1$, $f_n$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall x > 0,\ f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$, qui appartient à $]0,1]$. On notera $x_n$ cette solution.
2. Montrer que $(x_n)$ est décroissante.
3. En déduire que $(x_n)$ converge vers 0.
4. Montrer que pour $n \geqslant 3$, $x_n > \dfrac{1}{n}$.
5. Etudier le signe de $x - \ln(x)$ et en déduire que $x_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. La fonction $f_n$ est clairement continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ vers $f_n(]0,+\infty[) = ]-\infty,+\infty[$.
   Puisque $0 \in f_n(]0,+\infty[)$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement une solution dans $]0,+\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$f_n(x_{n+1}) = nx_{n+1} + \ln(x_{n+1}) = (n+1)x_{n+1} + \ln(x_{n+1}) - x_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) - x_{n+1} = -x_{n+1} < 0$$
   Ainsi, $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$ et puisque $f_n$ est croissante, on en déduit que $x_{n+1} < x_n$.
   La suite $(x_n)$ est donc décroissante.
3. La suite $(x_n)$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
   Si jamais on avait $\ell > 0$, alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ nx_n + \ln(x_n) = 0 \Longrightarrow x_n = \frac{-\ln(x_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln(\ell)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ :\ \text{contradiction}$$
   Donc la seule possibilité est que $\ell = 0$.
4. On a :
   $$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \ln(n) < 0 \text{ car } n \geqslant 3$$
   D'où :
   $$f_n\left(\frac{1}{n}\right) < f_n(x_n) \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{n} < x_n}$$
5. Pour tout $x > 0$, on sait que $\ln(x) \leqslant x - 1 < x$, donc $x - \ln(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
   On a alors :
   $$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n\frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} - \ln(\sqrt{n}) > 0$$
   D'où :
   $$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > f_n(x_n) \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}} > x_n}$$

**23** Pour $n \geqslant 3$ et $x \in [0, n]$, on note : $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f_n$ sur $[0, n]$.
   (b) En déduire que l'équation $x^n = e^x$ a une unique solution dans l'intervalle $[0, n]$. On note $u_n$ cette solution.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 3, u_n > 1$.
3. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose : $v_n = u_n - 1$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

1. (a) Soit $n \geq 3$. La fonction $f_n$ est bien dérivable sur $[0, n]$ et on a :

$$\forall x \in [0, n],\ \ f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = (n - x)x^{n-1}e^{-x}$$

| $x$ | $0$ | | $n$ |
|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $(n/e)^n - 1$ |

   (b) D'après les tableaux de variations donnés dans la question précédente, pour tout $n \geq 3$, la fonction $f_n$ est continue et strictement croissante sur $[0, n]$.
   Elle réalise donc une bijection entre $[0, n]$ et $[f(0), f(n)] = [-1, (n/e)^n - 1]$.
   Or, puisque $n \geqslant 3$, $\frac{n}{e} > 1$, donc $(n/e)^n - 1 > 0$.
   Puisque $0 \in [-1, (n/e)^n - 1]$, il existe donc un unique $u_n \in ]0, n[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. On a $f_n(1) = e^{-1} - 1 < 0$, donc $f_n(1) < f_n(u_n)$ et par stricte croissance de $f_n$ sur $[0, n]$, on a alors $1 < u_n$.
3. Pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$f_n(u_{n+1}) = (u_{n+1})^n e^{-u_{n+1}} - 1 = \frac{1}{u_{n+1}} \times \left((u_{n+1})^{n+1} e^{-u_{n+1}}\right) - 1 = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 < 0$$

   On a donc $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$ et par stricte croissance de $f_n$ sur $[0, n]$, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$.
   La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est donc (strictement) décroissante.
4. La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est donc décroissante et minorée par 1, elle converge vers un réel $\ell$ qui doit vérifier $\ell \geqslant 1$. Or, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ (u_n)^n e^{-u_n} = 1 \Longrightarrow n\ln(u_n) - u_n = 0 \Longrightarrow \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n} \quad (\text{car } \ell \neq 0)$$

   On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

5. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$, donc :

$$\ln(v_n + 1) = \frac{v_n + 1}{n}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on a $\ln(1 + v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $1 + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, d'où :

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

**24** Pour un entier $n \geqslant 3$, on pose $f_n(x) = x - n\ln(x)$ pour $x > 0$.

1. Dresser le tableau de variations de $f_n$ et esquisser son graphe.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note $u_n$ la plus petite solution de $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que $(u_n)$ est décroissante, et converge vers 1.
4. On pose $u_n = 1 + v_n$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

1. La fonction $f_n$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $\forall x > 0,\ f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x} = \dfrac{x-n}{x}$. La fonction $f_n$ est donc strictement décroissante sur $]0, n[$ puis strictement croissante sur $]n, +\infty[$.
   On a clairement $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty$.

   Pour la limite en $+\infty$, on a : $f_n(x) = x - n\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | | $n$ | | $+\infty$ |
| $f_n'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $n(1-\ln(n))$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2. La fonction $f_n$ est continue et strictement décroissante sur $]0, n[$, donc réalise une bijection de $]0, n[$ vers $f_n(]0, n[) = ]n(1-\ln(n)), +\infty[$. Comme $0 \in f_n(]0, n[)$ (car $1 - \ln(n) < 0$ puisque $n \geqslant 3 > e$), l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0, n[$
   De même, la fonction $f_n$ est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$, donc réalise une bijection de $[n, +\infty[$ vers $f_n([n, +\infty[) = [n(1-\ln(n)), +\infty[$. Comme $0 \in f_n([n, +\infty[)$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[n, +\infty[$
3. Soit $n \geqslant 3$. Remarquons que $f_n(1) = 1 > 0$, donc nécessairement sur l'intervalle $]0, n[$, $f_n(1) = 1$ et $f_n(u_n) = 0$, $f_n$ étant strictement décroissante, on a donc $1 < u_n$ :
   $$\forall n \geqslant 3, \quad 1 < u_n < n$$
   Soit $n \geqslant 3$.
   La fonction $f_{n+1}$ est décroissante sur $]0, n+1[$ et on sait que $f_{n+1}$ s'annule en $u_{n+1}$ sur cet intervalle. De plus,
   $$f_{n+1}(u_n) = u_n - (n+1)\ln(u_n) = f_n(u_n) - \ln(u_n) = -\ln(u_n) < 0$$
   On a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, avec $f_{n+1}$ décroissante sur $]0, n+1[$ et $u_n$, $u_{n+1}$ appartenant tous deux à cet intervalle, donc $u_n > u_{n+1}$.
   La suite $(u_n)$ est donc décroissante.
   La suite $(u_n)$ étant minorée par 1 et décroissante, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 1$. Or, on sait que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n\ln(u_n) \Longrightarrow \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
   La suite $(u_n)$ converge donc bien vers 1.

4. On pose $u_n = 1 + v_n$, autrement dit, $(v_n)$ converge vers 0. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n\ln(u_n) \Longrightarrow n\ln(1+v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \Longrightarrow nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \Longrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

$\boxed{\mathbf{25}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \longmapsto -1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique $x_n$ dans $]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

   (b) Montrer que $1 + \ln(1 - x_n) + \displaystyle\int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.
   En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

1. Soit $n \geqslant 2$. La fonction $f_n$ est continue sur $]0,1[$ (c'est une fonction polynomiale).
   De plus, $f_n$ est dérivable et $\forall x \in ]0,1[, f'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} > 0$, la fonction $f_n$ est donc strictement croissante sur $]0,1[$.
   Étant continue et strictement croissante, $f_n$ réalise donc une bijection de $]0,1[$ vers $f_n(]0,1[)$.
   Or, $f_n(]0,1[) = ]f_n(0), f_n(1)[ = \left]-1, \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right[$.
   Comme $0 \in f_n(]0,1[)$, il existe un unique réel $x_n \in ]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. (a) Soit $n \geqslant 2$.
   On a $f_n(x_{n+1}) = -1 + x_{n+1} + \dfrac{x_{n+1}^2}{2} + \cdots + \dfrac{x_{n+1}^n}{n} = f_{n+1}(x_{n+1}) - \dfrac{x_{n+1}^{n+1}}{n+1} = -\dfrac{x_{n+1}^{n+1}}{n+1} < 0$.
   On a donc $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$ donc $x_{n+1} < x_n$ (puisque $f_n$ est strictement croissante sur $]0,1[$, avec $x_n \in ]0,1[$ et $x_{n+1} \in ]0,1[$).
   Finalement, la suite $(x_n)$ est donc décroissante.
   Remarquons que, étant décroissante et minorée, la suite $(x_n)$ est donc convergente.

   (b)
$$\begin{aligned}1 + \ln(1-x_n) + \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t}dt &= 1 - \int_0^{x_n} \frac{1}{1-t}dt + \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t}dt = 1 - \int_0^{x_n} \frac{1-t^n}{1-t}dt \\ &= 1 - \int_0^{x_n} \sum_{k=0}^{n-1} t^k dt = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_n^{k+1}}{k+1} = f_n(x_n) = 0\end{aligned}$$

   De plus, remarquons que :
   pour tout $n \geqslant 2$,
$$0 \leqslant \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t}dt \leqslant \frac{1}{1-x_n} \int_0^{x_n} t^n dt \leqslant \frac{1}{1-x_0} \int_0^{1} t^n dt = \frac{1}{1-x_0} \times \frac{1}{n+1}$$
   Par encadrement, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t}dt = 0$.
   On doit donc avoir :
$$\lim_{n\to+\infty} \ln(1-x_n) = -1$$
   donc :
$$1 - x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}, \qquad \text{autrement dit} \qquad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-1}$$