

## Corrigé du devoir maison n°3

A) Soient  $(m, x) \in \mathbb{R}^2$ . L'équation proposée s'écrit

$$x^2 + (m - 7)x + m - 4 = 0$$

On calcule :  $\Delta = (m - 7)^2 - 4(m - 4) = m^2 - 18m + 65 = (m - 9)^2 - 16$

- Cette équation a une seule solution réelle si et seulement si  $m - 9 = -4$  ou  $4 \Leftrightarrow m = 5$  ou  $13$  et dans ces cas  $x = \frac{-(m-7)}{2}$  soit  $1$  ou  $-3$ .

Si  $m=5$  alors il y a une solution réelle,  $S = \{1\}$  ;  
si  $m = 13$  alors il y a une solution réelle,  $S = \{-3\}$

- Cette équation n'admet pas de solution réelle si et seulement si  $m \in ]5; 13[$

Si  $m \in ]5; 13[$  alors il n'y a pas de solution réelle,  $S = \emptyset$

- Cette équation admet 2 solutions réelles si et seulement si  $m < 5$  ou  $m > 13$ . Dans ces cas les solutions s'écrivent :

Si  $m < 5$  ou  $m > 13$  alors il y a deux solutions réelles,

$$S = \left\{ \frac{-m+7-\sqrt{m^2-18m+65}}{2}, \frac{-m+7+\sqrt{m^2-18m+65}}{2} \right\}$$

B)

1. Soit  $\theta \in ]-\pi; \pi[$ . En remarquant que  $1 = e^{i0} = e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}}$ ,

on a  $z = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta}{2}} 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$  d'après la formule d'Euler.

$\theta \in ]-\pi; \pi[$  donc  $\frac{\theta}{2} \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  ainsi  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$  et  $|z| = |e^{i\frac{\theta}{2}}| \times |2| \times |\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)| = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Conclusion : la forme exponentielle de  $z$  est  $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{i\frac{\theta}{2}}$

2. La forme exponentielle de  $z^4$  est d'une part :  $16 \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{2i\theta}$  d'après la formule de Moivre et par compatibilité du module avec le produit/les puissances.

Par ailleurs avec la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} z^4 &= 1 + 4e^{i\theta} + 6e^{2i\theta} + 4e^{3i\theta} + e^{4i\theta} \\ &= e^{2i\theta}(e^{-2i\theta} + 4e^{-i\theta} + 6 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}) \\ &= e^{2i\theta}(2\cos(2\theta) + 8\cos(\theta) + 6) \text{ d'après la } \underline{\text{formule d'Euler}} \end{aligned}$$

En comparant avec l'écriture précédente, on a nécessairement  $|z^4| = 2\cos(2\theta) + 8\cos(\theta) + 6$  donc  $2\cos(2\theta) + 8\cos(\theta) + 6 > 0$ .

3. En identifiant les modules dans les 2 écritures précédentes de  $z^4$  on a  $\forall \theta \in ]-\pi; \pi[$ :

$$16 \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos(2\theta) + 8\cos(\theta) + 6$$

CQFD

Remarque : pensez à nommer les formules utilisées.