1 Notations

1 Soient A, B et C trois événements d'une tribu $\mathcal{A}$. Exprimer les événements suivants en fonction de A, B et C et des opérations possibles dans $\mathcal{A}$, et décrire leur événement contraire.

1. E_1 : A seul se réalise
2. E_2 : A et C se réalisent, mais non B.
3. E_3 : Les trois événements se réalisent.
4. E_4 : L'un au moins des événements se réalise.
5. E_5 : Deux événements au moins se produisent.
6. E_6 : Un événement au plus se réalise.
7. E_7 : Aucun des trois événements ne se produit.
8. E_8 : Exactement deux événements se produisent.
9. E_9 : Au plus deux événements se produisent.

2 On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soient A, B, C trois événements de $\mathcal{A}$. Parmi les phrases suivantes, lesquelles ont un sens ?

1. $\mathbb{P}(A) = 0$
2. $A \leqslant 1/2$
3. $\mathbb{P}(A) = -0.2$
4. $\mathbb{P}(B) = e/2$.
5. $\mathbb{P}(A) \subset \mathbb{P}(B)$
6. $\mathbb{P}(A) = \emptyset$
7. $\mathbb{P}(A \times B) = \mathbb{P}(C)$
8. $B = \Omega$
9. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$.
10. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \cup \mathbb{P}(C)$
11. $\mathbb{P}(\mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(A)$
12. $\mathbb{P}(C) \geqslant \mathbb{P}(B)$.

2 Dénombrement

3 On lance 5 fois de suite un même dé équilibré à 6 faces.

1. Proposer un univers Ω modélisant cette expérience, et préciser $Card(\Omega)$.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 5 numéros distincts ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir toujours le même numéro ?

4 On joue à Pile ou Face 4 fois de suite avec une pièce équilibrée. On note A « on obtient deux fois Pile et deux fois Face », et B « les deux premiers lancers ont donné des résultats différents ».

1. Décrire l'univers Ω et $\mathcal{P}(\Omega)$. Que vaut $Card(\mathcal{P}(\Omega))$?
2. Calculer $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$.

5 Une urne contient cinq boules vertes, six boules bleues et sept boules jaunes, toutes différentes (numérotées) mais indistinguables au toucher. On prélève trois boules au hasard successivement et sans remise.

1. Calculer la probabilité pour que les trois boules soient de la même couleur.
2. Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une boule verte.
3. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une boule de chaque couleur.
4. Recommencer les questions précédentes si on fait des tirages avec remise.

6 Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On tire trois fois de suite une boule avec remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre strictement croissant ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre croissant ?

7 Un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du 6 soit le triple de la probabilité de sortie du 1. Les numéros de 1 à 5 ont cependant la même probabilité de sortie.

1. Quelle est la probabilité de sortie de chaque numéro ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir un numéro impair.

$\boxed{8}$ Soit $p \in]0,1[$. On considère $\mathbb{P}\ : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ telle que $\forall k \geqslant 0,\ \mathbb{P}(\{k\}) = p(1-p)^k$.
Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Que vaut la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

$\boxed{9}$ Soit $\lambda > 0$. On considère $\mathbb{P}\ : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ telle que $\forall k \geqslant 0,\ \mathbb{P}(\{k\}) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

$\boxed{10}$ Dans une urne se trouvent quatre boules noires et deux boules blanches. Cinq personnes tirent successivement et sans remise une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné.
Quelle est la probabilité de victoire de chacune des cinq personnes ?

$\boxed{11}$ Une galette des rois est découpée en 12 parts égales. Elle ne contient qu'une seule fève. On a 12 convives qui choisissent au hasard leur part, les uns après les autres, du plus jeune au plus âgé. Vaut-il mieux être plus jeune ou plus vieux pour avoir le maximum de chances d'avoir la fève ?

3 Univers infini dénombrable

$\boxed{12}$ Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire successivement et infiniment des boules dans cette urne. À chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule supplémentaire de la même couleur. On note B_n l'événement « la boule tirée au n-ième tirage est blanche ».

1. Déterminer la probabilité qu'on ne tire que des boules blanches.
2. Montrer que la boule rouge initiale sera tirée presque-sûrement.

$\boxed{13}$ Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire successivement avec remise des boules dans cette urne. Si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne en ajoutant une boule blanche supplémentaire. Si on tire une boule rouge, le jeu s'arrête. On note R_n l'événement « la boule tirée au n-ième tirage est rouge ».

1. Déterminer la probabilité de R_n pour tout $n \geqslant 1$.
2. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

$\boxed{14}$ Une urne contient deux boules blanches et une boule rouge. On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule dans cette urne, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule rouge ; le jeu s'arrête alors. On note pour $n \geqslant 1$, B_n : « on tire une boule blanche au n-ième tirage », et F_n : « le jeu s'arrête à l'issue du n-ième tirage ».

1. Exprimer F_n en fonction des B_i.
2. Soit A : « le jeu s'arrête ». Déterminer $\mathbb{P}(A)$.

$\boxed{15}$ On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (avec équiprobabilité) une urne, puis on tire successivement et avec remise deux boules dans cette urne.

1. On note A_j l'événement « la boule numéro j est blanche ». Calculer la probabilité de A_1 et de A_2.
2. Les événements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?

$\boxed{16}$ On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer infiniment un dé équilibré à 6 faces. On note A_n : « on n'a pas obtenu de 6 lors des n premiers lancers ».

1. Déterminer la probabilité de l'événement « on n'obtient jamais de 6 ».
2. Montrer que presque-sûrement on obtient au moins une fois un numéro pair.

17 Alain et Bruno lancent le même dé à tour de rôle et Alain commence. Les lancers sont indépendants. Le gagnant est le premier à obtenir un « 6 ». Quand Alain ou Bruno gagne, la partie s'arrête.
On s'intéresse aux trois événements suivants : $A =$ « victoire d'Alain », $B =$ « victoire de Bruno » et $D =$ « pas de vainqueur ».
On note F_n : « fin de la partie au n-ième lancer » et S_j : « le j-ième lancer donne un 6 ».

1. En exprimant l'événement D à l'aide des événements S_j, déterminer la probabilité qu'il n'y ait pas de vainqueur.
2. Exprimer l'événement F_n à l'aide des événements S_j et en déduire la probabilité de F_n.
3. Exprimer les événements A et B à l'aide d'événements F_n.
4. Calculer la probabilité de victoire de chaque joueur.

4 Probabilités conditionnelles et indépendance

18 Une usine fabrique 3% de pièces défectueuses. Toutes les pièces fabriquées sont contrôlées. 99% des pièces correctes sont acceptées et 98% des pièces défectueuses sont refusées. Calculer la probabilité pour que :

1. Une pièce testée soit refusée et bonne.
2. Une pièce testée soit acceptée.
3. Une pièce qui a été acceptée soit en fait défectueuse.

19 Une urne contient deux boules vertes et trois boules jaunes. On effectue quatre tirages avec remise dans cette urne. On considère les événements suivants :

— A : « les deux premiers tirages donnent des boules vertes »
— B : « les deux derniers tirages donnent des boules vertes »
— C : « les deuxième et troisième tirages donnent des boules jaunes »
— D : « les quatre tirages donnent des boules de la même couleur »

Parmi ces événements, lesquels sont indépendants ? Ces quatre événements sont-ils mutuellement indépendants ?

20 On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé équilibré à 6 faces. On note A : « le premier chiffre est pair », B : « le second chiffre est impair », C : « la somme des chiffres est paire ».
Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

5 Suites et Probabilités

21 On effectue une infinité de lancers d'une pièce équilibrée . Pour $n \geqslant 2$, on note A_n : « au cours des n premiers lancers, Face n'est jamais suivi de Pile ».

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{n+1}{2^n}$.
2. Est-il possible que Face ne soit jamais suivi de Pile ?

22 On effectue une infinité de lancers d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est $p \in]0,1[$, avec $p \neq 1/2$. Pour $n \geqslant 2$, on note A_n : « au cours des n premiers lancers, Face n'est jamais suivi de Pile ».

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1}$
2. Est-il possible que Face ne soit jamais suivi de Pile ?

23 On dispose d'une pièce équilibrée, avec laquelle on fait une succession illimitée de lancers.
On note A_n l'événement : on obtient pour la première fois un Double Pile aux lancers n et $n+1$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_2)$, $\mathbb{P}(A_3)$
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a : $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(A_{n-1}) + \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(A_{n-2})$. En déduire $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

24 Deux joueurs A et B jouent aux échecs sans discontinuer. Le joueur B gagne la première partie. La probabilité que A remporte une partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,6$. La probabilité que B remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,5$. On note p_n la probabilité que B remporte la n-ième partie.
À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la suite (p_n) est arithmético-géométrique et donner sa formule explicite.

25 Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Si une place est réservée le jour k, elle le sera encore le jour $k+1$ avec probabilité $9/10$. Si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $4/10$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note R_k l'événement « la place est réservée le jour k » et $r_k = \mathbb{P}(R_k)$ sa probabilité. On suppose que $r_0 = 0$.

1. Exprimer r_{k+1} en fonction de r_k.
2. En déduire l'expression explicite de r_k en fonction de k et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.

26 On considère le jeu palpitant suivant : on lance trois pièces équilibrées, si les trois pièces donnent Pile le jeu s'arrête, sinon on recommence.

1. Calculer la probabilité que le jeu s'arrête au n-ième lancer. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. Calculer la probabilité qu'au n-ième lancer, le jeu ne se soit pas encore arrêté. En déduire d'une autre manière que le jeu s'arrête presque sûrement.

27 On admet que pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.
Une urne contient une boule noire. Un joueur lance un dé équilibré : s'il obtient un six, il tire une boule dans l'urne et le jeu s'arrête ; sinon il rajoute une boule blanche dans l'urne et recommence.

1. Pour tout $k \geqslant 1$, calculer la probabilité de A_k : « on obtient pour la première fois un six au k-ième lancer ».
2. Montrer que $(A_k)_{k \geqslant 1}$ est un système quasi-complet d'événements. En déduire la probabilité que la boule tirée au final soit noire.

28 Dans une salle de jeux, il y a trois machines M_1, M_2 et M_3. Les deux premières machines permettent de gagner avec une probabilité de $1/4$. La troisième machine est truquée et fait perdre à coup sûr. Un joueur non averti choisit une machine au hasard et joue plusieurs fois de suite avec la même machine.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il perde : au 1er coup ? au 2ème coup ? 2 coups de suite ? n coups de suite ?
2. Ayant perdu 2 coups de suite, quelle est la probabilité pour qu'il ait joué avec la machine truquée ?

29 On considère une suite infinie d'urnes $(U_n)_{n \geqslant 2}$, chaque urne contient des boules blanches et des boules noires. On tire une boule dans U_2, puis une boule dans U_3, etc. jusqu'à obtenir pour la première fois une boule noire.
On note pour $n \geqslant 2$, A_n « les tirages dans les urnes 2 à n n'amènent que des boules blanches ».

1. On suppose que pour tout $n \geqslant 2$, U_n contient n boules dont une seule noire.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
   (b) En déduire la probabilité de ne jamais tirer de boule noire.
2. On suppose que pour tout $n \geqslant 2$, U_n contient n^2 boules dont une seule noire.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{n+1}{2n}$.
   (b) En déduire la probabilité de ne jamais tirer de boule noire.