1 Calcul d'intégrales et de primitives

1 Montrer que $F : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2 Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2(x-1)}$ définie sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 3.

3 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-2}^{4} (x^3 + x - 2)dx$
2. $\displaystyle\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}dx$
3. $\displaystyle\int_{2}^{4} \ln(2t)dt$
4. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$
5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}}dt$
6. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}dt$
7. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$
8. $\displaystyle\int_{-1/3}^{0} 2^{3x+1}dx$
9. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{(\ln t)^\alpha}{t}dt$ pour $\alpha > 0$.
10. $\displaystyle\int_{0}^{2} |x^3 - x^2 + x - 1|dx$
11. $\displaystyle\int_{0}^{5} t|t^2 - 1|dt$
12. $\displaystyle\int_{0}^{5} \frac{t-1}{|t^2-2t|+1}dt$
13. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt$
14. $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln(t)dt$
15. $\displaystyle\int_{0}^{1} \text{Arctan}(t)dt$.
16. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\text{Arctan}(x)dx$.
17. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x^2\sin(2x)dx$.
18. $\displaystyle\int_{0}^{1} (x^2 - x + 1)e^x dx$.
19. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin(x)\cos^3(x)dx$.
20. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin^2(x)dx$.

4 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_1^e t^n \ln t \, dt$ et $J_n = \displaystyle\int_1^e t^n (\ln t)^2 \, dt$.

5 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{1-t^2}dt$
2. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t(t-1)}dt$
3. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3t+1}{t(t+1)}dt$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(t-2)(t+3)}dt$
5. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{t(t+1)(t+2)}dt$
6. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t^2}{t^2+4t-5}dt$

6 Calculer les intégrales suivantes avec le changement de variable indiqué.

1. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1}\,dx$ $(u = \sqrt{e^x - 1})$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$ $(x = t + 1)$
3. $\displaystyle\int_{1}^{4/3} \frac{t}{(3t-2)^5}dt$ $(u = 3t - 2)$
4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{2t}}{1-e^t}dt$ $(t = \ln(x))$
5. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{t}-t}{\sqrt{t}+1}dt$ $(x = \sqrt{t})$
6. $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{\sqrt{t}}dt$ $(t = x^2)$
7. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)}$ $(u = \cos(t))$
8. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} \frac{dt}{\cos(t)}$ $(x = \sin(t))$
9. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{t(t^3+1)}dt$ $(u = t^3)$
10. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$ $(t = x^2)$
11. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}dx$ $(u = \sin(x))$
12. $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)dx$ $(x = \sqrt{t})$

2 Suites d'intégrales

7 On note pour $p, q \in \mathbb{N}$, $I(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Calculer $I(0,q)$ et $I(p,0)$ pour $p, q \in \mathbb{N}$.
2. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, exprimer $I(p+1,q)$ en fonction de $I(p,q+1)$.
3. Calculer $I(p,q)$ en fonction de p et q.

8 On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. La suite (I_n) est-elle monotone ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

9 On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Est-elle minorée ?
2. Montrer que sur $[1,e]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \frac{x}{e}$. En déduire un encadrement de I_n.
3. Montrer que : $\forall n \geqslant 0,\ I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.

10 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Déterminer une relation entre I_n et I_{n-1} pour $n \geqslant 1$.
   En déduire la valeur de I_n pour tout $n \geqslant 1$.

11 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Etablir une relation entre I_n et I_{n+1}. En déduire la valeur de I_n.
2. Calculer alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln(2)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire un encadrement de u_n.

3 Fonctions définies par des intégrales

13 Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\cos t} dt$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction F et montrer que F est dérivable sur son domaine de définition. Calculer sa dérivée.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $F(x) \leq 0$.
3. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |F(x)| \leq e|x|$.
5. Etudier la parité de la fonction F.

14 Pour chacune des fonctions suivantes, donner :

— le domaine de définition de f
— le signe de f sur le domaine de définition,
— la parité éventuelle
— la dérivée de f si elle existe

1. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$
2. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$
3. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x |t| dt$
4. $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x |t|^3 dt$
5. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1} dt$
6. $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1 + t^2} dt$
7. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1 - t^4}$
8. $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x e^{-t^2} dt$
9. $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$

15 Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. En remarquant que $\ln(2) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ pour tout réel $x > 0$, montrer que f admet $\ln(2)$ pour limite en 0.
3. Montrer que f peut se prolonger en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
4. Étudier les variations de f. Étudier le signe de $f(x)$ sur le domaine de définition de f.
5. Tracer l'allure de la courbe de f.

16 On pose $g(x) = (2x - 1) \displaystyle\int_{1/2}^x \frac{t^4 dt}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geqslant 0$.
3. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

17 Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. f est-elle paire ? impaire ?
3. Démontrer que pour $x > 0$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$.
4. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.