TP Informatique 26 - Sujets de concours 2012

Exercice 26.1

Ecricome S 2012

L'exercice étudie une suite récurrente de la forme :

$$u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

On a montré au préalable qu'il existait un réel α tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha - u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

ce qui prouve ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

On suppose qu'une fonction `ECRICOME` est déjà écrite en Turbo-Pascal, qui à un réel x donné renvoie le réel $f(x)$.
A l'aide de la fonction `ECRICOME`, écrire une procédure `SUITE` en Turbo-Pascal qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier N tel que $\dfrac{1}{2^N} \leqslant \varepsilon$ et renvoie la valeur de u_N correspondante.

Exercice 26.2

HEC S 2012

Soit θ un réel de $]0,1[$ et $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \theta(1-\theta)^{n-1}$$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P([X = n]) = p_n$.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Ecrire une fonction Pascal d'en-tête `FUNCTION X(theta : REAL) : INTEGER;` permettant de simuler la variable X.

Exercice 26.3

EDHEC E 2012

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité q. On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :
- Soit si l'on a obtenu "Pile"
- Soit si l'on a obtenu n fois "Face".

T_n désigne le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus.
Compléter les trois instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n à l'exécution de l'instruction `WRITELN(t,x,y);`

```
PROGRAM EDHEC_2012 ;
    VAR n,t,x,y : INTEGER ;
        p : REAL ;
BEGIN
    RANDOMIZE ;
    t := 0; x:= 0 ; y:=0 ;
    READLN(n) ;
    WHILE (x=0) AND (t<n)
        DO
            BEGIN
            ..................  ;
            IF RANDOM > P
                THEN ...............
                ELSE ...............  ;
            END ;
    WRITELN(t,x,y) ;
END.
```

Exercice 26.4

ESSEC E 2012

Soit n un entier naturel non nul.
On suppose que le cours d'une action qui évolue entre les instants 0 et n est une suite aléatoire $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ définie par :

$$S_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ S_k = S_{k-1} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)$$

où :

- μ et v sont des constantes réelles strictement positives
- (Y_k) est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, i.e. $P(Y_k = 1) = P(Y_k = -1) = \frac{1}{2}$.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre l'expression Pascal `2*random(2)-1` ?
2. Dans la déclaration de fonction qui suit, remplacer les parties manquantes par des expressions Pascal pour que la fonction ainsi déclarée simule la variable aléatoire S_n

```
FUNCTION S(n : INTEGER ; mu,v : REAL) : REAL ;
    VAR k : INTEGER ;
        tmp : REAL ;
    BEGIN
        tmp := 1 ;
        FOR k:= ..........  TO ...........
            DO tmp := tmp * .............. ;
        S := ............ ;
    END ;
```