TP Informatique 14 - Algorithme de Hörner

1 Calcul intuitif de $P(x)$

Exercice 14.1

1.
```
PROGRAM intuitif ;
TYPE POLYNOME = ARRAY[0..10] OF REAL ;
VAR n : INTEGER ;
    a : POLYNOME ;
    x : REAL ;
FUNCTION puiss(x : REAL ; n : INTEGER) : REAL ;
    VAR p : REAL ;
    BEGIN
    p := 1 ;
    FOR k := 1 TO n DO
        p := p*x ;
    puiss := p ;
    END ;
FUNCTION somme(n : INTEGER ; a : POLYNOME ; x : REAL) : REAL ;
    VAR s : REAL ;
        k : INTEGER ;
    BEGIN
    s :=0 ;
    FOR k :=0 TO n
        DO s:= s+a[k]*puiss(x,k) ;
    somme := s ;
    END ;
BEGIN
WRITELN('Donner le degré n et le réel x') ;
READLN(n,x) ;
FOR k := 0 TO n DO
    BEGIN
    WRITELN('Donner le coefficient ',k,' du polynôme') ;
    READLN(a[k]) ;
    END ;
WRITELN('P(x) vaut ',somme(n,a,x)) ;
END.
```

2. On fait comme calcul :

$$P(x) = a_0 + a_1 \times x + a_2 \times x \times x + \cdots + a_n \times x \times x \times \cdots \times x$$

On voit exactement n "+" dans ce calcul et on a $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ "$\times$". On a donc :

$$n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n}{2} \text{ opérations élémentaires}$$

2 Algorithme de Hörner

L'algorithme de Hörner est basé sur une autre méthode, qui est bien plus efficace comme on va le voir. Le principe est le suivant :

1. Etape 0 : on pose
$$P_0 = a_n$$
2. Etape 1 : on calcule
$$P_1 = a_{n-1} + P_0 x =$$
3. Etape 2 : on calcule
$$P_2 = a_{n-2} + P_1 x =$$
4. ...
5. Etape n : on calcule
$$P_n = a_0 + P_{n-1} x =$$

Exercice 14.2

1. (a) Etape 0 : on pose
$$P_0 = a_n$$
   (b) Etape 1 : on calcule
$$P_1 = a_{n-1} + P_0 x = a_{n-1} + a_n x$$
   (c) Etape 2 : on calcule
$$P_2 = a_{n-2} + P_1 x = a_{n-2} + a_{n-1} x + a_n x^2$$
   (d) ...
   (e) Etape n : on calcule
$$P_n = a_0 + P_{n-1} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
2. Avec l'algorithme d'Hörner, pour calculer $P(x)$, on calcule donc :
$$P(x) = a_0 + x \times (a_1 + x \times (a_2 + x \times (a_3 + x \times (\cdots (a_{n-1} + x \times a_n)))))$$
   On voit donc exactement n "$\times$" et n "+" dans ce calcul, on a donc :
$$2n \text{ opérations élémentaires}$$
   L'algorithme d'Hörner est donc bien moins coûteux en calcul que l'algorithme intuitif.

Exercice 14.3

1.
```
PROGRAM horner ;
TYPE POLYNOME = ARRAY[0..10] OF REAL ;
VAR P : POLYNOME ;
    x,a : REAL ;
    k,n : INTEGER ;
BEGIN
    WRITELN('Entrez le degré du polynôme P') ;
    READLN(n) ;
    FOR k := 0 TO n DO
        BEGIN
        WRITELN('Donner le coefficient de X^',k,' de P') ;
        READLN(P[k]);
        END ;
```

```
    WRITELN('Donner la valeur de x pour calculer P(x)') ;
    READLN(x) ;
    a := P[n] ;
    FOR k := 1 TO n DO a := P[n-k] + x*a ;
    WRITELN('P(',x,') vaut : ', a) ;
    READLN ;
    END.
```

2.

```
PROGRAM horner_avec_fonction ;
TYPE POLYNOME = ARRAY[0..10] OF REAL ;
VAR P : POLYNOME ;
    x : REAL ;
    k,n : INTEGER ;
FUNCTION valeur(n : INTEGER ; P : POLYNOME ; x : REAL) : REAL ;
    VAR a : REAL ;
    BEGIN
    a := P[n] ;
    FOR k := 1 TO n DO a := P[n-k] + x*a ;
    valeur := a ;
    END ;
BEGIN
    WRITELN('Entrez le degré du polynôme P') ;
    READLN(n) ;
    FOR k := 0 TO n DO
        BEGIN
        WRITELN('Donner le coefficient de X^',k,' de P') ;
        READLN(P[k]);
        END ;
    WRITELN('Donner la valeur de x pour calculer P(x)') ;
    READLN(x) ;
    WRITELN('P(',x,') vaut : ', valeur(n,P,x)) ;
    READLN ;
    END.
```

Exercice 14.4

Méthode intuitive :

$$P(3) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 + 2 \times 3 \times 3 \times 3 + 6 \times 3 \times 3 + 5 \times 3 - 2 = 256$$

Méthode de Hörner :

$$P(X) = -2 + X(5 + X(6 + X(-2 + 3X)))$$

donc

$$P(3) = -2 + 3(5 + 3(6 + 3(-2 + 3 \times 3))) = 256$$

Exercice 14.5

voir TP 13