

02.1 Déterminer la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' , et celle de \mathcal{B}' à \mathcal{B} dans les cas suivants :

- \mathcal{B} est la base can. de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{B}' = ((2, 1, -2), (3, 1, -2), (0, 1, -1))$.
- \mathcal{B} est la base can. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$
- \mathcal{B} base can. de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$.

02.2 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.

02.3 Déterminer les valeurs propres ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés pour chacune des matrices suivantes :

$$1. A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad 2. B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

Les matrices A, B, C sont-elles diagonalisables ?

02.4 Soit $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 18 & 12 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$. Montrer que $M^2 = 3M$.

Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

02.5 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

02.6 Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables. Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

02.7 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A .

2. Déterminer le terme général des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$.

02.8 Soit $a \in \mathbb{R}$. On note u_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie

$$\text{par } \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad (u_a(P))(X) = \frac{1}{2}P(X) + aX \int_0^1 P(t)dt.$$

- Pour quelles valeurs de a u_a est-il un automorphisme ? Pour les valeurs trouvées, déterminer l'endomorphisme u_a^{-1} .
- Déterminer les valeurs propres de u_a et les sous-espaces propres associés. u_a est-il diagonalisable ?

02.9 Soit $n \geq 2$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = 2XP' - P''$.

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
- Déterminer les valeurs propres de φ . φ est-elle diagonalisable ?