Exercice

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher et numérotées 1, 2 et 3.
On effectue une successiond e tirages au hasard d'une boule de cette urne, avec à chaque fois remise de la boule obtenue avant le tirage suivant.
Soit X le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir pout la première fois trois fois de suite le même numéro.
On note p_n la probabilité de l'événement $[X = n]$ et c_n la probabilité de l'événement $[X \leqslant n]$.

1. (a) Que valent p_1 et p_2 ? Calculer p_3 et p_4.
   (b) Pour $n \geqslant 2$, exprimer p_n à l'aide de c_n et c_{n-1}.
2. (a) Montrer que pour $n \geqslant 2$,
$$p_{n+3} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 (1 - c_n)$$
   (b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, $p_{n+3} - p_{n+2} + \frac{2}{27} p_n 0$.
3. (a) Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = p_{n+2} - \dfrac{2}{3} p_{n+1} - \dfrac{2}{9} p_n$. Calculer u_2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est nulle.
   (b) En déduire que pour $n \geqslant 2$,
$$p_n = \frac{1}{6\sqrt{3}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3} \right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3} \right)^{n-2} \right)$$
   (c) Montrer que la série de terme général p_n est convergente et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} p_n$. Que signifie le résultat obtenu ?
   (d) Montrer que X admet des moments de tout ordre.
   En particulier, calculer son espérance.