J. 0855

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

Ensai

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

MAI 2004

SPECIALITE ECONOMIE

composition de mathématiques

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit.

Le sujet comprend 4 pages (y compris celle-ci).

Le sujet est composé d'un problème et de trois exercices indépendants.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Soit $R_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n$, où n est un entier naturel non nul. On définit sur $R_{2n}[X]$ l'application f qui à tout polynôme P de $R_{2n}[X]$ associe $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2n\,XP$, où P' désigne la dérivée de P.

1. Montrer que l'application f ainsi définie est un endomorphisme sur $R_{2n}[X]$.
2. Déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres. On pourra montrer dans un premier temps que si P est un vecteur propre pour la valeur propre λ, alors

$$\frac{P'}{P} = \frac{n+2\lambda}{X-1} + \frac{n-\frac{\lambda}{2}}{X+1}.$$

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance m et d'écart type σ. On rappelle que la densité d'une loi normale de paramètres m et σ est :

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On définit alors la variable Y par :

$$Y = e^X$$

et la variable Z par :

$$Z = z_0 + Y$$

où z_0 est un nombre réel.

1. Déterminer la fonction de répartition G de Y en fonction de celle de X, notée Φ.
2. En déduire la densité g de Y. On dit que Y suit une loi log-normale.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y notées respectivement EY et VY.
4. Calculer l'espérance et la variance de Z notées respectivement EZ et VZ.

Exercice 3

Dans l'espace $M_3(R)$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on définit la matrice T :

$$T = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t & 1 & 1+\cos 4t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2\sin^2 t \end{pmatrix}$$

où t est un paramètre réel quelconque.

1. Déterminer les valeurs propres de T et les sous-espaces propres associés.
2. La matrice T est-elle diagonalisable ?

Problème

Dans tout le problème, on note $C^0([0,1])$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans le corps des réels R .

Première partie

On définit sur $C^0([0,1])\times C^0([0,1])$ l'application D par :

$$\forall(f,g)\in C^0([0,1])\times C^0([0,1]),\ D(f,g)=Sup_{[0,1]}|f(x)-g(x)|.$$

1 – Justifier l'existence de D.

2 – Pour $(f,g)\in C^0([0,1])\times C^0([0,1])$, que signifie $D(f,g)=0$?

3 – Montrer que D est symétrique, c'est-à-dire que :

$$\forall(f,g)\in C^0([0,1])\times C^0([0,1]), D(f,g)=D(g,f)$$

4 – Montrer que D vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall f,g,h\in C^0([0,1]), D(f,g)\le D(f,h)+D(h,g)$$

On a ainsi défini une distance sur l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$.

5 – On définit les fonctions f et g suivantes, pour $x\in[0,1]$: $f(x)=x^2$ et $g(x)=x$. Calculer $D(f,g)$. Tracer les graphes de f et g et représenter graphiquement $D(f,g)$.

Deuxième partie

1 – Montrer que :

$$\forall f,g\in C^0([0,1]), \left|\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 g(t)dt\right|\le D(f,g).$$

2 – On définit sur $[0,1]$ la suite de fonctions de $C^0([0,1])$ par $f_n(x)=\dfrac{\sin(n^2x)}{n}$, où n est un entier naturel non nul. Θ désignant l'application nulle, et f'_n la dérivée de f_n, montrer que :

$$\forall n\ge 1, D(f_n,\Theta)=\frac{1}{n} \text{ et } D(f'_n,\Theta)=n.$$

Troisième partie

L'objet de cette partie est d'étudier une suite de polynômes P_n et sa convergence vers une application f de $C^0([0,1])$, la convergence étant définie par : $\lim\limits_{n\to+\infty} D(f,P_n)=0$.

1 – On note par f l'application de $C^0([0,1])$ définie par :

$$f(x)=\frac{2}{2+x}$$

Pour n entier naturel, on définit le polynôme P_n élément de $C^0([0,1])$ par :

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^k, \text{ pour tout } x \text{ de } [0,1].$$

Etablir que $D(P_n, f) = \dfrac{1}{3.2^n}$.

2 – On prend pour f la restriction à $[0,1]$ de la fonction exponentielle, et on définit pour tout entier naturel n, la suite de polynômes P_n de $C^0([0,1])$ par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ , pour tout } x \text{ de } [0,1]$$

avec la convention $0! = 1$.

a) Démontrer que $e^x - P_n(x) = J(n,x)$ où $J(n,x) = \int_0^x \left[\dfrac{e^t (x-t)^n}{n!}\right] dt$.

b) En déduire que $D(P_n, f) \leq \dfrac{e}{(n+1)!}$.

c) A partir de quel rang la distance est inférieure à 10^{-3} ?

3 – Dans cette question, on prend pour f la restriction de la fonction sinus à $[0,1]$.

La suite P_n de polynômes de $C^0([0,1])$ est définie par récurrence de la façon suivante,

Pour tout x de $[0,1]$:

$$P_1(x) = x$$

$$P_{n+1}(x) = 3P_n\left(\frac{x}{3}\right) - 4\left[P_n\left(\frac{x}{3}\right)\right]^3$$

a) Donner les formes explicites des polynômes $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

b) On définit l'application T sur $[-1,1]$ par : $\forall x \in [-1,1], T(x) = 3x - 4x^3$.

Etudier les variations de T. Montrer que pour tous $u, v \in [-1,1]$, $|T(u) - T(v)| \leq 9|u - v|$.

c) Etablir la formule : $\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$.

d) Montrer que l'on a, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$.

e) Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$\forall x \in [0,1] \text{ , } P_n(x) \in [-1,1]$$

et,

$$|P_n(x) - \sin x| \leq \frac{x^3}{2.3^n}.$$

FIN DE L'EPREUVE

ERRATA

Sujet externe mathématiques:

- Dans l'énoncé de la question 2) de l'exercice 1, il faut lire :

$$\frac{P'}{P} = \frac{n+\frac{\lambda}{2}}{X-1} + \frac{n-\frac{\lambda}{2}}{X+1}$$

- Dans l'énoncé du problème, à la question 2 de la deuxième partie, il faut lire :

$\forall n > 1$ au lieu de $\forall n \geq 1$