

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

MATH II BL

L'objet du problème est l'étude, sur un exemple, d'un paradoxe concernant les temps d'attente de certaines configurations dans un jeu de « pile ou face ».

On considère donc une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de « pile » et de « face » sont équiprobables.

On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par R_n l'événement « *pile apparaît au lancer de rang n* » et par S_n l'événement « *face apparaît au lancer de rang n* »

Partie I : Un résultat utile

On considère une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, prenant ses valeurs dans \mathbb{N}^* et, pour tout entier naturel non nul n , on pose : $a_n = \mathbf{P}([X = n])$.

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par : $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

1. a) Justifier que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de nombres réels positifs ou nuls vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.

b) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est convergente.

2. Dans cette question, on suppose que la fonction f est dérivable au point 1 ; elle vérifie donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(1)$$

a) Établir pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1[$ l'égalité : $\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$.

b) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ est croissante sur $[0, 1[$ et qu'elle vérifie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1[$ les inégalités suivantes : $0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq f'(1)$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel N non nul, on a : $0 \leq \sum_{n=1}^N n a_n \leq f'(1)$.

En déduire que la série de terme général $n a_n$ est convergente.

d) À l'aide des résultats des question a) et c), justifier pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1[$, les inégalités suivantes : $0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1)$.

e) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance donnée par :

$$\mathbf{E}(X) = f'(1)$$

3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X admet une espérance notée $\mathbf{E}(X)$.

a) Justifier la croissance de la fonction $x \mapsto \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ et montrer qu'elle vérifie, pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1[$, la double inégalité suivante : $0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \mathbf{E}(X)$.

b) En déduire que la fonction f est dérivable en 1 et qu'elle vérifie : $f'(1) = \mathbf{E}(X)$.

4. **Cas particulier :** on suppose, dans cette question, que p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et que X suit la loi géométrique de paramètre p .

a) Donner, pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1[$, une expression de $f(x)$ en fonction de x ne comportant pas de somme de série.

b) Montrer que f est dérivable en 1, préciser $f'(1)$ et retrouver ainsi la valeur de l'espérance de la variable aléatoire X .

Partie II : Loi du temps d'attente de la première configuration « pile, pile, face »

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un face précédé de deux piles si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y prend la valeur 9.

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $c_n = \mathbf{P}([Y = n])$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note B_n l'événement $R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$ et U_n l'événement $\bigcup_{i=3}^n B_i$.

1. On pose $u_1 = u_2 = 0$, et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_n = \mathbf{P}(U_n)$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone et convergente.

2. a) Calculer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, la probabilité de l'événement B_n .

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

c) En déduire les valeurs des nombres u_3, u_4 et u_5 .

3. Soit n un entier n supérieur ou égal à 5.

a) Justifier l'égalité des événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et préciser leur probabilité.

b) Exprimer l'événement U_{n+1} en fonction des événements U_n et B_{n+1} ; en déduire l'égalité suivante :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$

c) Vérifier les égalités suivantes $u_3 = u_2 + \frac{1}{8}(1 - u_1)$ et $u_4 = u_3 + \frac{1}{8}(1 - u_2)$.

d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et en déduire la probabilité de l'événement $[Y = 0]$.

4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $v_n = 1 - u_n$.

a) Préciser les nombres v_1, v_2, v_3, v_4 .

b) Exprimer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, v_{n+1} en fonction de v_n et de v_{n-2} .

c) En déduire pour tout entier N supérieur ou égal à 1, l'égalité suivante : $\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^N v_k$.

d) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer sa somme.

5. Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n$$

- a) Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Exprimer l'événement $[Y = n]$ en fonction des événements $\overline{U_{n-1}}$ et U_n ($\overline{U_{n-1}}$ désignant l'événement contraire de U_{n-1}).
En déduire l'égalité : $c_n = v_{n-1} - v_n$.
- b) Valider l'égalité $c_n = v_{n-1} - v_n$ dans le cas où n est égal à 2 ou 3.
- c) Établir pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, l'égalité : $g(x) = (x-1)h(x) + x$.
- d) Exprimer pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1[$, le quotient $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ en fonction de $h(x)$.
- e) Justifier la croissance de la fonction h et, pour tout entier naturel N non nul et tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1]$, la double inégalité suivante : $\sum_{k=1}^N v_k x^k \leq h(x) \leq h(1)$.
En déduire la relation suivante : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} h(x) = h(1)$.
- f) Montrer que g est dérivable au point 1 et, à l'aide de la **Partie I**, en déduire que la variable aléatoire Y admet une espérance égale à 8.

Partie III : Paradoxe de Walter Penney (1969)

Deux joueurs J et J' s'affrontent dans un jeu utilisant la même expérience aléatoire que précédemment avec les règles suivantes :

- le joueur J est gagnant si la configuration « pile, pile, face » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « face, pile, pile » n'apparaisse ;
- le joueur J' est gagnant si la configuration « face, pile, pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « pile, pile, face » n'apparaisse ;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur J' possède un net avantage sur le joueur J .

1. Soit Y' la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un pile précédé d'un pile lui-même précédé d'un face si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y' prend la valeur 6.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on désigne par B'_n l'événement $S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap R_n$, par U'_n l'événement $\bigcup_{i=3}^n B'_i$ et on note u'_n la probabilité de U'_n .

- a) Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
Les événements B'_n, B'_{n+1} et B'_{n+2} sont-ils deux à deux incompatibles ?
- b) En déduire que, si on pose $u'_1 = u'_2 = 0$, le même raisonnement que dans la **Partie II**, conduit à l'égalité $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$, pour tout entier n supérieur ou égal à 3.
- c) En déduire l'égalité des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(u'_n)_{n \geq 1}$.
- d) Prouver que les deux variables aléatoires Y et Y' suivent la même loi et vérifient : $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Y')$.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note G_n l'événement « le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n » et g_n la probabilité de G_n .
- a) Calculer g_3 et g_4 et établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'égalité suivante : $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- b) En déduire la probabilité pour que le joueur J soit déclaré gagnant.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par d_n la probabilité que lors des n premiers lancers n'apparaissent jamais deux piles consécutifs.

a) Préciser d_1 et d_2 .

b) En considérant les résultats des lancers de rang 1 et 2, justifier pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante : $d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$.

c) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β que l'on ne cherchera pas à calculer, telles que, pour tout entier naturel n non nul, on ait : $d_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$.

d) En déduire que la série de terme général d_n converge et, en utilisant l'égalité du b), prouver l'égalité suivante : $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.

4. On désigne par T la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.

a) Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}([T > n] \cup [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n$$

b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}([T = n]) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$$

c) Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.

5. Calculer la probabilité que le joueur J' soit déclaré gagnant et conclure.

6. Si la configuration gagnante du joueur J avait été « pile, pile, face, pile, pile, face » et la configuration gagnante du joueur J' avait été « face, face, pile, face, face, pile », quelle aurait-été la conclusion ?

7. Soit d et t les fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \quad \text{et} \quad t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = n]) x^n$$

a) Établir pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ l'égalité suivante :

$$t(x) = (x - 1) \left(d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} \right) + x$$

b) Exprimer pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1[$, le quotient $\frac{t(x) - t(1)}{x - 1}$ en fonction de $d(x)$.

c) En s'inspirant de la question 5.e de la **Partie II**, justifier l'égalité suivante : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} d(x) = d(1)$.

d) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et préciser $\mathbf{E}(T)$.