ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1997

OPTION ECONOMIQUE
OPTION LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

Mathématiques II

Vendredi 2 Mai 1997 de 14h à 18h

On considère deux machines identiques et on note X_1, X_2 les variables aléatoires indiquant les durées de marche de la 1[ière] et de la 2[ième] machines (avant que celles-ci ne tombent en panne) à partir d'un instant 0.
On désigne par a un nombre réel strictement positif donné, et l'on fait les hypothèses suivantes sur le fonctionnement des machines:

(H1) Pour tout couple (t, h) de nombres réels tels que $t \geq 0$ et $h > 0$, on suppose que la variable aléatoire X_i ($i = 1$ ou $i = 2$) à valeurs dans $\mathbf{R}+$ indiquant la durée de marche de la $i^{\text{ième}}$ machine à partir de l'instant 0 vérifie la relation suivante:

$$P(X_i < t+h \,/\, X_i \geq t) = ah + h\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction indépendante de l'entier i et de l'instant t qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

(H2) Les deux machines fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.

Pour tout nombre réel positif t, on désigne par:
- $N(t)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de machines en panne à l'instant t.
- $p_0(t)$, $p_1(t)$ et $p_2(t)$ les probabilités $P(N(t) = 0)$, $P(N(t) = 1)$ et $P(N(t) = 2)$ pour que le nombre de machines en panne à l'instant t soit exactement égal à 0, 1 et 2. On suppose les deux machines en marche à l'instant 0, autrement dit $p_0(0) = 1$.

L'objectif est de déterminer, sous ces hypothèses, la loi du nombre aléatoire $N(t)$ des machines déjà tombées en panne à un instant t. Le résultat de l'étude est obtenu par deux méthodes indépendantes dans les parties I et II.

Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large est autorisée.

PARTIE 1

On étudie ici la loi de la variable aléatoire $N(t)$ en déterminant la loi des variables aléatoires X_1, X_2 introduites dans le préambule.

1°) Lois de la durée de marche X_i d'une machine ($i = 1$ ou 2).

On désigne par (t, h) un couple de nombres réels tels que $t \geq 0$ et $h > 0$, et l'on note $g_i(t) = P(X_i \geq t)$ la probabilité pour que X_i soit supérieure ou égale à t.

a) Comparer les événements $(X_i \geq t)$ et $(t \leq X_i < t+h) \cup (X_i \geq t+h)$.

En déduire l'expression de la probabilité $P(t \leq X_i < t+h)$ en fonction de $g_i(t)$ et $g_i(t+h)$, puis établir à l'aide de l'hypothèse H1 l'égalité $g_i(t) - g_i(t+h) = [ah+h\varepsilon(h)]g_i(t)$.

b) En déduire successivement que:

- $0 \leq g_i(t) - g_i(t+h) \leq [a+\varepsilon(h)]h$.
- $0 \leq g_i(t-h) - g_i(t) \leq [a+\varepsilon(h)]h$ lorsque $0 < h \leq t$.

En déduire que la fonction $t \to g_i(t)$ est continue à droite sur $[0, +\infty[$, puis, en formant le quotient $[g_i(t+h) - g_i(t)]/h$ et en prenant sa limite lorsque h tend vers 0, montrer que la fonction $t \to g_i(t)$ est dérivable à droite sur $[0, +\infty[$.

Donner l'expression de sa dérivée à droite en t en fonction de a et $g_i(t)$.

En déduire de même que la fonction $t \to g_i(t)$ est continue à gauche sur $]0, \infty[$, puis dérivable à gauche sur $]0, +\infty[$.

c) Etablir que g_i est dérivable sur $\mathbf{R}+$ et exprimer $g_i'(t)$ en fonction de a et $g_i(t)$.

En étudiant la fonction $t \to \exp(at).g_i(t)$ sur $\mathbf{R}+$ et en remarquant que $g_i(0) = 1$, expliciter la fonction g_i.

d) En déduire la fonction de répartition, la densité, la loi et l'espérance des variables X_i ainsi qu'une interprétation du nombre réel a.

2°) Etude de la loi de la variable aléatoire $N(t)$.

Déduire des résultats précédents les expressions factorisées des trois probabilités $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, la loi et l'espérance de $N(t)$.

Quelle sont les limites de $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ quand t tend vers $+\infty$? Etait-ce prévisible?

PARTIE 2

On étudie maintenant par une seconde méthode la loi de la variable aléatoire $N(t)$.

Cette étude, indépendante de celle de la partie I, n'utilise aucun de ses résultats.

On désigne par (t, h) un couple quelconque de nombres réels tels que $t \geq 0$ et $h > 0$.

1°) Etude des probabilités conditionnelles $P(N(t+h) = k / N(t) = i)$.

a) Que valent les trois probabilités $P(N(t+h) = 1 / N(t) = 2)$, $P(N(t+h) = 0 / N(t) = 1)$ et $P(N(t+h) = 0 / N(t) = 2)$?

b) Etablir, en les justifiant, les résultats suivants où les symboles ε, ε_1, ... désignent des fonctions définies sur $\mathbf{R}+$ et de limite nulle en 0:

- $P(N(t+h) = 0 / N(t) = 0) = [1-ah-h\varepsilon(h)]^2 = 1 - 2ah + h\varepsilon_1(h)$.
  $P(N(t+h) = 1 / N(t) = 1) = 1 - ah - h\varepsilon(h)$.
  $P(N(t+h) = 2 / N(t) = 2) = 1$.
- Exprimer de même $P(N(t+h) = 2 / N(t) = 1)$ et $P(N(t+h) = 1 / N(t) = 0)$.
- Montrer enfin que $P(N(t+h) = 2 / N(t) = 0) = h\varepsilon_2(h)$.

2°) Etude des probabilités de panne $p_k(t)$.

a) A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $p_0(t+h)$, $p_1(t+h)$, $p_2(t+h)$ en fonction de a, h, $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$.
Quelles expressions de $p_k(t+h) - p_k(t)$, puis de $p_k(t) - p_k(t-h)$ (où $h \leq t$), en déduit-on pour $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$?

b) En déduire que les fonctions $t \to p_k(t)$ sont continues à droite sur $[0, +\infty[$, puis, en formant les quotients $[p_k(t+h) - p_k(t)]/h$ pour $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ et en prenant leurs limites lorsque h tend vers 0, montrer que les fonctions $t \to p_k(t)$ sont dérivables à droite sur $[0, +\infty[$.
Donner l'expression de leurs dérivées à droite en t en fonction de a, $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$.
En déduire de même que les fonctions $t \to p_k(t)$ sont continues à gauche sur $]0, +\infty[$, puis dérivables à gauche sur $]0, +\infty[$.

c) En déduire la relation (R) suivante:

$$\begin{bmatrix} p_0'(t) \\ p_1'(t) \\ p_2'(t) \end{bmatrix} = M.\begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} -2a & 0 & 0 \\ 2a & -a & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}.$$

3°) Etude de la diagonalisation de la matrice M.

a) Déterminer les valeurs propres de cette matrice M, que l'on notera λ_0, λ_1, λ_2 avec $\lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_0$.

b) Déterminer successivement les vecteurs-colonnes propres V_0 associé à λ_0, V_1 associé à λ_1, V_2 associé à λ_2, dont les troisièmes composantes sont égales à 1.
La matrice M est-elle diagonalisable?

c) Soit Π la matrice d'ordre 3 dont les trois vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre, V_0, V_1, V_2. Etablir que cette matrice est inversible, préciser son inverse, et expliciter la matrice $\Pi^{-1}M\Pi$.

4°) Etude de la loi de la variable aléatoire N(t).

On pose, avec les notations précédentes:

$$\begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} = \Pi.\begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}.$$

a) Montrer que q_0, q_1, q_2 sont dérivables sur **R**+ et déduire de la relation (R) du 2°:

$$q_0'(t) = 0 \quad ; \quad q_1'(t) = -aq_1(t) \quad ; \quad q_2'(t) = -2aq_2(t).$$

b) En déduire que les fonctions $t \to q_0(t)$, $t \to \exp(at).q_1(t)$ et $t \to \exp(2at).q_2(t)$ sont constantes (on notera C_0, C_1, C_2 les valeurs de ces constantes réelles).
En déduire les expressions de $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ en fonction de C_0, C_1, C_2, a et t.

c) En précisant les valeurs de $p_0(0)$, $p_1(0)$, $p_2(0)$, déterminer les constantes C_0, C_1, C_2.

d) En déduire à nouveau les expressions factorisées de $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, la loi et l'espérance de la variable aléatoire N(t).