MATHEMATIQUES 2 option économique

MATHEMATIQUES option lettres et sciences humaines (B/L)

Mardi 16 Mai 1995 de 14h à 18h

Les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long x 15cm de large sont autorisées.

Le problème a pour objet l'étude des arrivées successives des clients à un guichet (distributeur de billets d'une banque, péage d'autoroute, etc).
Dans la partie I sont établis quelques résultats préliminaires d'analyse.

PARTIE I

1°) Etude d'une équation fonctionnelle.

On considère une fonction continue *non nulle* $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant la relation:

$$(1) \qquad \forall x,y \geq 0, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

a) En faisant $x = 0$ dans la relation (1), déterminer la valeur de $f(0)$.

b) En faisant $x = y = t/2$ dans la relation (1), établir que $f(t) \geq 0$ lorsque $t \geq 0$.

On se propose d'établir que $f(t) > 0$ lorsque $t \geq 0$.

A cet effet, on raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe un nombre réel positif t_0 tel que $f(t_0) = 0$. En déduire que $f(t_0/2) = 0$, puis, pour tout entier $n \geq 1$, que $f(t_0/2^n) = 0$.

Montrer qu'alors $f(0) = 0$, et conclure.

c) Soit F la primitive sur $\mathbb{R}+$ de la fonction continue f s'annulant en 0.

En intégrant sur $[0, 1]$ la fonction $y \to f(x+y)$, établir la relation:

$$(2) \qquad \forall x \geq 0, \quad F(x+1)-F(x) = F(1)f(x).$$

Montrer à l'aide des questions précédentes que $F(1) > 0$, et en déduire que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}+$.

d) Par dérivation de la fonction $y \to f(x+y)$, établir que:

$$(3) \qquad \forall x \geq 0, \quad f'(x) = f'(0)f(x).$$

e) On pose $\lambda = -f'(0)$. Par dérivation de la fonction $x \to g(x) = \exp(\lambda x).f(x)$, déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de λ et de x.

f) Réciproquement, montrer que la fonction f ainsi obtenue vérifie la relation (1).

2°) Etude d'une suite de fonctions.

a) On désigne par λ un réel strictement positif et par n un entier naturel non nul.

Etablir la convergence et déterminer en fonction de λ et n la valeur de l'intégrale:

$$k_n = \int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-\lambda t}dt.$$

b) On désigne alors par f_n la fonction définie par:

$$f_n(t) = \frac{1}{k_n}t^{n-1}e^{-\lambda t} \quad \text{si } t \geq 0, \quad \text{et } f_n(t) = 0 \quad \text{si } t < 0.$$

Etudier pour $n \geq 2$ les variations de cette fonction f_n et déterminer son maximum M_n.

c) Etudier les positions relatives des courbes représentatives de f_n et de f_{n+1}.

d) Tracer sur une même figure les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5.

e) Etudier le sens de variation et la convergence de la suite $(M_n)_{n\geq 2}$.

Donner un équivalent de M_n à l'aide de la formule de Stirling (on rappelle que n! est équivalent à $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$) et en déduire la limite de la suite $(M_n)_{n\geq 2}$.

PARTIE II

On considère les arrivées successives des clients à un guichet.

Etant donnés deux nombres réels t_1, t_2 tels que $t_1 < t_2$, on note $N(t_1, t_2)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1, t_2]$ et l'on note $P(N(t_1, t_2) = n)$ la probabilité pour que n clients exactement se présentent au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1, t_2]$.

(Par convention, on posera $P(N(t_1, t_1) = 0) = 1$, et $P(N(t_1, t_1) = n) = 0$ lorsque $n \geq 1$).

On fait les hypothèses suivantes:

A) Etant donnés quatre nombres réels t_1, t_2, t_3, t_4 tels que $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, les variables aléatoires $N(t_1, t_2)$ et $N(t_3, t_4)$ sont indépendantes.
(Cette hypothèse signifie que les nombres de clients se présentant au cours de deux intervalles de temps disjoints sont indépendants).

B) Pour tout entier naturel n existe une fonction continue $p_n: \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout couple de nombres réels (t_1, t_2) tels que $t_1 \leq t_2$:

$$P(N(t_1, t_2) = n) = p_n(t_2-t_1).$$

(Cette hypothèse signifie que la probabilité pour que n clients se présentent entre les instants t_1 et t_2 dépend continûment de la durée t_2-t_1).

1°) Equation fonctionnelle des fonctions p_n.
On considère dans cette question deux nombres réels positifs x, y.
a) Exprimer $P(N(0, x+y) = 0)$ en fonction de $P(N(0, x) = 0)$ et de $P(N(x, x+y) = 0)$, puis montrer que $p_o(x+y) = p_o(x)p_o(y)$.
Déduire alors de la partie I l'expression de $p_o(x)$ en posant $\lambda = -p_o'(0)$.
b) Etablir plus généralement que, pour tout entier naturel n, on a:

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(x)p_k(y).$$

2°) Loi de l'instant d'arrivée du premier client.
On fixe un instant-origine et l'on note T_1 la variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{R}+$) indiquant l'instant d'arrivée du premier client à partir de cet instant-origine.
a) Justifier l'égalité des événements "$N(0, x) = 0$" et "$T_1 > x$".
b) Déduire des résultats précédents la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire T_1 dont on reconnaîtra la loi.
c) Déterminer enfin l'espérance et la variance de T_1.

On conserve les hypothèses A et B et on fait, de plus, l'hypothèse complémentaire C:

C) Etant donnés deux nombres réels t_1, t_2 tels que $t_1 < t_2$, on suppose que la variable aléatoire $N(t_1, t_2)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_2-t_1)$.

3°) Loi de l'instant d'arrivée du n° client.
On fixe un instant-origine et l'on note T_n la variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{R}+$) indiquant l'instant d'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client ($n \geq 1$) à partir de cet instant-origine.
a) Comparer pour tout réel positif t les événements "$N(0, t) \leq n-1$" et "$T_n > t$".
b) En déduire la fonction de répartition et la densité de T_2, de T_3, et plus généralement la fonction de répartition F_n et la densité f_n de T_n (*loi gamma de paramètres n et λ*).
c) Déterminer enfin l'espérance et la variance de cette variable aléatoire T_n.

4°) Loi du nombre de clients procédant à un achat.
On désigne par p (où $0 < p < 1$) la probabilité pour qu'un client se présentant au guichet procède à un achat et par $A(t_1, t_2)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1, t_2]$ et procédant à un achat.
a) Soient n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$.
Déterminer la probabilité conditionnelle $P(A(t_1, t_2) = k / N(t_1, t_2) = n)$ et reconnaître la loi de $A(t_1, t_2)$ conditionnée par l'événement $N(t_1, t_2) = n$.
b) A l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire la loi de la variable aléatoire $A(t_1, t_2)$ et préciser son espérance.
c) Donner, de même, la loi de la variable aléatoire $B(t_1, t_2)$ indiquant le nombre des clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1, t_2]$ et ne procédant pas à un achat.
d) Etudier enfin l'indépendance des variables aléatoires $A(t_1, t_2)$ et $B(t_1, t_2)$.