Exercices posés à l'oral ENSAE 2010

1. **Exercice 1**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

1. Exemple d'une telle matrice pour $n = 2$.
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
3. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
4. Montrer que n est pair.
5. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^3 + B = 0$. Montrer que le rang de B est pair.

Exercice 2

Déterminer $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que, pour tout entier n, $\cos(n\theta) \geqslant 0$.

2. **Exercice 1**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 4A = 0$.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
2. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de réels positifs ou nuls. On pose

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}.$$

1. Si (a_n) est constante, étudier la limite de la suite (u_n).
2. Cas général : montrer que (u_n) converge si, et seulement si, il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n \leqslant M^{2^n}.$$

3. **Exercice 1**

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|M_{ii}| > \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |M_{ij}|$.

Montrer que M est inversible.

2. Soit M une matrice stochastique, c'est-à-dire à coefficients positifs dont la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1.

   a. Trouver une valeur propre évidente.

   b. Montrer que si λ est une valeur propre (complexe) de M, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

Exercice 2

1. Soient a et b des réels positifs. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}\cdot$
2. Soit (u_n) une suite de réels positifs, (v_n) tel que $v_n = \dfrac{1}{1 + n^2 u_n}\cdot$

Montrer que si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ diverge.

Que se passe-t-il si $\sum u_n$ diverge ?

4. **Exercice 1**

1. Sachant que $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, montrer que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

2. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, g continue et strictement positive sur $[a,b]$.
Montrer que

$$f^2(b)-f^2(a) \leqslant 4\left(\int_a^b g(t)f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{f^2(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t\right).$$

3. Qu'obtient-on si $a=0$, $b=\dfrac{\pi}{2}$ et $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\cos((2k-1)x)$?
(*Le jury indique ensuite qu'il faut prendre* $g=1$.)

Exercice 2
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant comme valeurs $-1,0,1$. On a

$$P([X=-1])=p_1,\ P([X=1])=p_2,\ \ P([Y=-1])=P([Y=0])=P([Y=1])=\frac{1}{3}\cdot$$

1. Donner la loi de $S=X+Y$.
2. On pose $Z=\begin{cases}\theta_1 & \text{si } S=0\\ \theta_2 & \text{sinon.}\end{cases}$
Donner les valeurs de θ_1 et θ_2 si $E(z)=3$ et $V(Z)=2$.

5. **Exercice 1**

Soit la suite (a_n) positive et tendant vers 0. On pose $u_n=(-1)^n a_n$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge. Démontrer le théorème.

Il y avait une suite.

Exercice 2

On a trois lots d'articles. Dans le lot i, n_i articles sont défectueux, m_i sont corrects ($1\leqslant i\leqslant 3$). On commence par choisir un lot, puis on tire deux articles au hasard. Quelle la probabilité pour que le second article soit défectueux, sachant que le premier l'était ?

6. **Exercice 1**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
1. Montrer que A est inversible si et seulement si $\det A$ est différent de 0.
2. Trouver un polynôme de degré 2 dont les racines sont exactement les valeurs propres de A.
3. On suppose A diagonalisable. Soit H une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et e un réel.
   a. On suppose que A a une seule valeur propre, à quelle condition $M(e)=M+eH$ est diagonalisable ?
   b. On suppose que A a deux valeurs propres. Montrer que $M(e)$ est diagonalisable pour e assez petit.

Exercice 2

Soit la suite réelle (a_n) positive ou nulle. Soit la suite (u_n) définie par récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+\frac{a_n}{u_n}\cdot$$

Montrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, la série $\sum a_n$ converge.

7. Exercice 1

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un polynôme P non nul de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. Montrer que si λ est valeur propre de A et $P(A) = 0$, alors λ est racine de P.
3. On prend un polynôme M tel que $M(A) = 0$ et M de degré minimal. Montrer que les valeurs propres de A sont les racines de M.
4. Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 2

Soit(a_n) comme une suite décroissante positive qui tend vers 0.

1. Montrer que la série $\dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}}$ diverge (*le jury guide vers une comparaison série-intégrale*).
2. Même question avec $\dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$.

8. Exercice 1

Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(n+k)}.$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - v_n| = 0$
2. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire réelle, de densité f et de fonction de répartition F. On suppose que f est paire et que $M_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)F(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire, pour tout réel x une relation entre $F(x)$ et $F(-x)$.
3. On pose $g(x) = cf(x)F(\theta x)$, où $\theta > 0$ et $c \in \mathbb{R}$.
   a. Trouver c pour que g soit une densité de probabilité.
   b. On suppose que g est une densité de la variable Y. Exprimer $\mu_k = E(Y^k)$ en fonction de M_k.

Indication : discuter selon la parité de k.
Il y avait une question de plus.

9. Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant $2A^2 - A = 0$.

1. Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On considére la suite de vecteurs-colonnes (X_n) définie par $X_0 = C$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Déterminer la limite de la suite (X_n).

Exercice 2

1. On considère la série de terme général $\dfrac{x^n}{n^{\frac{1}{2}}}$. Pour quelles valeurs de x la série est-elle convergente. On note $f(x)$ la somme de la série.
2. Quelle est la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1^- ?

10. Exercice 1

1. *Les définitions d'un cône et d'une fonction homogène sont rappelés. Question sur les propriétés des fonctions homogènes.*
2. Énoncer le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes.
3. Soit f une fonction de deux variables a-homogène et différentiable. Démontrer que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=a(a-1)f(x,y).$$

Exercice 2

Exercice sur la ruine des joueurs : deux joueurs qui possèdent au départ a et b euros respectivement livrent une succession de parties (la probabilité de gain des deux joueurs est p et $1-p$), le gagnant recevant 1 euro du perdant. Déterminer la probabilité de ruine de chaque joueur. (*Il y avait quelques questions en plus*).

11. Exercice 2

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$, F sa fonction de répartition. On suppose que X a une espérance finie.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-F(n))=0$.
2. Justifier que
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}P([X=j])=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}P([X=j]).$$
3. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-F(k))=n(1-F(n))+\sum_{k=1}^{n}kP([X=k]).$$
4. Conclure que
$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}(1-F(k)).$$