

**CONCOURS EXTERNE POUR LE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES ADMINISTRATEURS**  
**et**  
**CONCOURS D'ENTRÉE À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE**  
**ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE (Option Économie)**

*La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.*

*Il est notamment demandé aux candidats d'encadrer les résultats obtenus et de faire apparaître clairement les théorèmes utilisés et les points clés de leurs réponses.*

*En particulier pour les questions dont l'énoncé fournit la réponse, le détail des calculs ou des justifications doit figurer explicitement sur la copie.*

**AVERTISSEMENT :** Il est rappelé à tous les candidats que le programme officiel de l'épreuve est le programme de Mathématiques des classes préparatoires au concours d'admission du groupe Sciences sociales (B/L) de la section des lettres de l'École normale supérieure, dites « Khagnes S ».

Toute résolution faisant appel à des résultats ne figurant pas explicitement à ce programme sera rejetée.

*La durée de l'épreuve est de 4 heures. Le candidat devra traiter les deux problèmes, qui sont indépendants.*

**PROBLÈME - I**

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels.

1° a) Montrer que l'ensemble

$$C = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Préciser sa dimension et en donner une base.

On considère l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = a + ib & \longrightarrow & M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{array}$$

où  $a$  et  $b$  désignent respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre complexe  $z$ .

b) Montrer que, pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  de  $\mathbb{C}$ , on a

$$\Phi(z + z') = \Phi(z) + \Phi(z')$$

$$\Phi(z \times z') = \Phi(z) \times \Phi(z').$$

En déduire que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) (\forall p \in \mathbb{N}) \quad \Phi(z^p) = [\Phi(z)]^p.$$

c) L'application  $\Phi$  est-elle un isomorphisme d'espaces vectoriels ?

2° a) Soit  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , calculer  $A^k$ . Le résultat obtenu est-il encore valable pour  $k \in \mathbb{Z}$  ?

b) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer une matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que

$$M^p = J, \quad \text{où } J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3° On considère l'application

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P(X) \longrightarrow (1+X^2)P''(X) - 2XP'(X). \end{array}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

a) Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la restriction  $f_n$  de  $f$  à  $E_n$  est un endomorphisme de  $E_n$ .

b) Déterminer le noyau de  $f_n$ . Préciser sa dimension.

c) Déterminer les valeurs propres de  $f_n$  et préciser leur multiplicité.

d) L'endomorphisme  $f_n$  est-il diagonalisable ?

e) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  un entier fixé. Déterminer un endomorphisme  $g_n$  de  $E_n$  tel que

$$g_n^p = g_n \circ g_n \circ \dots \circ g_n = f_n$$

( $g_n$  est composé  $p$  fois). On pourra utiliser la question 2°. b).

## PROBLÈME - II

### Partie A

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$L(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt.$$

1° a) Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $L$ .

b) Prouver que, pour tout  $x \in D$ ,  $L(x+1) = (x+1)L(x)$ .

c) Calculer  $L(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

2° Prouver que, pour tous  $x > 0$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ , on a

$$\int_{x(1-\alpha)}^{x(1+\alpha)} t^x e^{-t} dt = \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\alpha x}^{+\alpha x} \left(1 + \frac{u}{x}\right)^x e^{-u} du. \quad (1)$$

3° a) Rappeler la valeur de l'intégrale  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

b) Soit  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . Prouver que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_{-\alpha x}^{+\alpha x} e^{-\beta \frac{u^2}{2x}} du \right) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \quad (2)$$

4° a) Prouver que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , il existe un réel  $\alpha_0 \in ]0, 1[$  tel que, pour tout  $v$  vérifiant  $|v| < \alpha_0$ , on ait

$$-\frac{v^2}{2}(1+\varepsilon) \leq \ln(1+v) - v \leq -\frac{v^2}{2}(1-\varepsilon).$$

b) Pour  $\varepsilon$  et  $\alpha_0$  ainsi choisis, en déduire que, pour  $x > 0$  et  $u$  vérifiant  $|u| < \alpha_0 x$ , on a

$$e^{-\frac{u^2}{2x}(1+\varepsilon)} \leq \left(1 + \frac{u}{x}\right)^x e^{-u} \leq e^{-\frac{u^2}{2x}(1-\varepsilon)}. \quad (3)$$

5° a) Soit  $f$ ,  $g_1$  et  $g_2$  trois fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  admettent en  $+\infty$  une limite (finie) qu'on notera respectivement  $l_1$  et  $l_2$  et qu'il existe  $X_0 > 0$  tel que, pour tout  $x > X_0$ ,  $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$ .  
Prouver que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que

$$(\forall x > A) \quad l_1 - \varepsilon \leq f(x) \leq l_2 + \varepsilon. \quad (4)$$

b) Prouver l'existence de  $h_0 \in ]0, 1[$  tel que, pour tout  $h$  vérifiant  $|h| < h_0$ , on ait

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+h}} - 1 \right| \leq |h|. \quad (5)$$

c) Soit  $\varepsilon \in ]0, h_0[$ ,  $\alpha_0$  associé à  $\varepsilon$  comme à la question A.4°.a) et  $\alpha \in ]0, \alpha_0[$ .  
Prouver qu'il existe  $B > 0$  tel que, pour tout  $x > B$ , on ait

$$1 - 2\varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_{-\alpha x}^{+\alpha x} \left(1 + \frac{u}{x}\right)^x e^{-u} du \leq 1 + 2\varepsilon. \quad (6)$$

(On pourra utiliser entre autres la question A.3°.b.)

### Partie B

1° Pour  $x > 0$ , on pose  $s(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$ .

a) Pour  $x > 0$ , on note  $\psi_x$  la fonction définie par  $\psi_x(t) = t^x e^{-t}$ . Étudier les variations de la fonction  $\psi_x$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

b) Justifier que, pour tout  $\alpha$  vérifiant  $0 < \alpha < 1$ , on a

$$0 < (1 - \alpha)e^\alpha < 1 \quad \text{et} \quad 0 < (1 + \alpha)e^{-\alpha} < 1.$$

c) Prouver que, pour tout  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < 1$ , l'intégrale

$$J_1(x) = \frac{1}{s(x)} \int_0^{x(1-\alpha)} t^x e^{-t} dt$$

tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . (On pourra utiliser les variations de  $\psi_x$  sur  $[0, x(1-\alpha)]$ .)

d) Prouver pareillement que, pour tout  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < 1$ , l'intégrale

$$J_2(x) = \frac{1}{s(x)} \int_{x(1+\alpha)}^{+\infty} t^{x+2} e^{-t} \frac{dt}{t^2}$$

tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

2° a) Montrer enfin que, pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ , on a

$$L(x) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}. \quad (7)$$

b) En déduire un équivalent de  $n!$ .