

AVERTISSEMENT : Il est rappelé à tous les candidats que le programme officiel de l'épreuve est le programme de Mathématiques des classes préparatoires au concours d'admission du groupe Sciences sociales (B/L) de la section des lettres de l'École normale supérieure, dites "Khagnes S".

Toute résolution faisant appel à des résultats ne figurant pas explicitement à ce programme sera rejetée.

Objet du Problème :

Le sujet est un problème d'analyse et de probabilités dont le but est la détermination des lois de probabilité de certaines variables aléatoires discrètes ou à densité définies à partir d'une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de densité exponentielle.

Les candidats sont invités à lire attentivement le problème en entier et à l'aborder dans son intégralité, quitte à utiliser des résultats fournis par l'énoncé même s'ils n'ont pas su les démontrer (en indiquant clairement quels résultats ils ont admis).

Les 3 parties sont indépendantes, sauf la question II.3.b) qui utilise les résultats de la partie I.

Notations :

- Pour deux entiers naturels p et $q \geq p$, on note $\llbracket p, q \rrbracket = [p, q] \cap \mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels compris, au sens large, entre p et q .
- Dans tout le problème, on considère un univers Ω muni d'une probabilité P et des variables aléatoires définies sur Ω , discrètes ou à valeurs dans \mathbb{R}_+ , à densité continue sur \mathbb{R}_+ . Dans ce cas, on ne s'intéressera qu'à la restriction à \mathbb{R}_+ de leur densité ou de leur fonction de répartition.
- Pour deux événements A et B , on désigne par $P(A | B)$ la probabilité de A sachant B .

Partie I

1° Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant 0. Prouver par récurrence sur p que

$$(\forall x \in I) (\forall p \in \mathbb{N}) \quad f(x) = \sum_{k=0}^p \left(f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right) + \int_0^x f^{(p+1)}(t) \frac{(x-t)^p}{p!} dt \quad (1)$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de f .

Pour $x \in [0, 1[$, on pose $h(x) = \ln(1-x)$.

2° Calculer la dérivée p -ième de h .

3° Soit $x \in [0, 1[$ fixé. Déterminer

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x h^{(p+1)}(t) \frac{(x-t)^p}{p!} dt \right).$$

On pourra commencer par étudier les variations de la fonction $\varphi(t) = \frac{t-x}{t-1}$ sur l'intervalle $[0, x]$.

4° En déduire que

$$(\forall x \in [0, 1[) \quad \ln(1-x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}. \quad (2)$$

5° Montrer que

$$(\forall x \in [0, 1]) \quad x + (1-x) \ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}. \quad (3)$$

Partie II

1° Soit X une variable aléatoire réelle à densité continue sur \mathbb{R}_+ , qu'on peut interpréter comme la durée de vie d'un phénomène aléatoire, ayant la propriété suivante : la durée de vie résiduelle à chaque instant suit la même loi de probabilité que X .

a) Montrer que cette condition s'écrit :

$$(\forall s \in \mathbb{R}_+) (\forall t \in \mathbb{R}_+) \quad G(t+s) = G(t)G(s) \quad (4)$$

où l'on a posé, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $G(t) = P(X > t)$.

b) Vérifier que la propriété (4) ci-dessus est satisfaite lorsque X suit une loi exponentielle sur \mathbb{R}_+ .

Dans toute la suite du problème, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi de probabilité exponentielle sur \mathbb{R}_+ de paramètre $\alpha > 0$, c'est-à-dire de densité

$$g(t) = \alpha e^{-\alpha t} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+.$$

On note F la fonction de répartition associée, c'est-à-dire la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$F(x) = P(X_0 \leq x).$$

Dans la suite de cette partie, on considère la variable aléatoire N à valeurs dans \mathbb{N}^* égale au plus petit indice $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n > X_0$.

2° a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $P(N = n \mid X_0 = x_0)$ en fonction de $p_0 = e^{-\alpha x_0}$.

b) En déduire que la loi de probabilité de N est

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad P(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

c) La variable aléatoire N a-t-elle une espérance ?

3° a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(X_N \leq x \mid N = n)$.

b) Déterminer la fonction de répartition Ψ de X_N et sa densité ψ .
On pourra utiliser la partie I.

Partie III

Dans toute cette partie, m désigne un entier naturel non nul fixé. On range les variables aléatoires X_0, X_1, \dots, X_m par ordre *décroissant*, pour obtenir une nouvelle suite de variables aléatoires notées Y_0, Y_1, \dots, Y_m . Ainsi, on a

$$Y_0 = \text{Max} \{X_k, 0 \leq k \leq m\} \quad \text{et} \quad Y_m = \text{Min} \{X_k, 0 \leq k \leq m\}.$$

- 1° Déterminer la fonction de répartition Φ_0 de Y_0 ainsi que sa densité φ_0 .
 2° Déterminer la fonction de répartition Φ_m de Y_m ainsi que sa densité φ_m .
 3° On désigne par \widehat{N} la variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* égale au plus petit indice $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_{m+n} > Y_0$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P(\widehat{N} > n) = \frac{m+1}{m+n+1}.$$

b) En déduire la loi de la variable aléatoire \widehat{N} .

c) La variable aléatoire \widehat{N} a-t-elle une espérance ?

- 4° a) Prouver que, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $(y_0, y_1, \dots, y_k) \in (\mathbb{R}_+)^{k+1}$, on a :

$$P(X_0 - X_1 > y_0, X_1 - X_2 > y_1, \dots, X_{k-1} - X_k > y_{k-1}, X_k > y_k) = \frac{1}{(k+1)!} \exp \left[-\alpha \sum_{j=0}^k (j+1) y_j \right]. \quad (5)$$

On pourra procéder par récurrence sur k en exprimant la probabilité cherchée en fonction de

$$P(X_0 - X_1 > y_0, X_1 - X_2 > y_1, \dots, X_{k-2} - X_{k-1} > y_{k-2}, X_{k-1} > y_{k-1} + t),$$

pour t dans un domaine à préciser.

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $(y_0, y_1, \dots, y_k) \in (\mathbb{R}_+)^{k+1}$, on a par symétrie :

$$P(Y_0 - Y_1 > y_0, Y_1 - Y_2 > y_1, \dots, Y_{k-1} - Y_k > y_{k-1}, Y_k > y_k) = (k+1)! P(X_0 - X_1 > y_0, X_1 - X_2 > y_1, \dots, X_{k-1} - X_k > y_{k-1}, X_k > y_k). \quad (6)$$

- b) En choisissant des valeurs particulières de y_0, \dots, y_k , prouver que, pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y_{k-1} - Y_k$ a pour densité sur \mathbb{R}_+ la fonction

$$t \rightarrow \alpha k e^{-\alpha k t}$$

et montrer que les variables aléatoires $Y_0 - Y_1, Y_1 - Y_2, \dots, Y_{m-1} - Y_m$ et Y_m sont indépendantes.

- c) Montrer que, pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, la variable aléatoire $Y_0 - Y_k$ a pour fonction de répartition sur \mathbb{R}_+

$$F_k(y) = [1 - e^{-\alpha y}]^k \quad (7)$$

et déterminer sa densité f_k .

On pourra encore procéder par récurrence sur k .

5° On désigne par \tilde{N} la variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* égale au plus petit indice $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_{m+n} \notin [Y_m, Y_0]$, c'est-à-dire tel que

$$X_{m+n} < \text{Min} \{X_k / 0 \leq k \leq m\} \quad \text{ou} \quad X_{m+n} > \text{Max} \{X_k / 0 \leq k \leq m\}.$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer

$$P(x \leq X_{m+k} \leq x+z, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket).$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$P(Y_m \leq X_{m+k} \leq Y_m + z, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket) = \frac{m+1}{m+n+1} [1 - e^{-\alpha z}]^n. \quad (8)$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que,

$$P(\tilde{N} > n) = \frac{n(m+1)}{m+n+1} \int_0^{+\infty} \alpha [1 - e^{-\alpha z}]^{m+n-1} e^{-\alpha z} dz \quad (9)$$

et en déduire $P(\tilde{N} > n)$.

d) En déduire la loi de probabilité de \tilde{N} .

La variable aléatoire \tilde{N} a-t-elle une espérance ?

6° Soit $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$.

a) Pour $z \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer $P(Y_k \leq z)$.

On pourra exprimer l'événement $(Y_k \leq z)$ à l'aide des événements $(X_j \leq z)$, pour obtenir une expression de $P(Y_k \leq z)$ faisant intervenir un symbole \sum , qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement.

b) En déduire que la densité de la loi de probabilité de Y_k est la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\varphi_k(z) = \alpha(k+1) C_{m+1}^{k+1} [1 - e^{-\alpha z}]^{m-k} e^{-\alpha(k+1)z}. \quad (10)$$

c) Les variables aléatoires $(Y_k)_{0 \leq k \leq m}$ sont-elles indépendantes ?