ENS B/L - 2013

Exercice 1

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

et P le polynôme défini par $P(X) = X^3 - X^2 - 7X + 11$. On note par convention $P(A)$ la matrice $P(A) = A^3 - A^2 - 7A + 11I_3$ où I_3 désigne la matrice identité de taille 3×3.

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que $P(A)$ est la matrice nulle.
2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et A^2.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. Calculer $P(A)V$ de deux manières pour en déduire que $P(\lambda) = 0$.

Le but des questions 4 à 6 est de montrer que, réciproquement, toutes les racines de P sont des valeurs propres de A. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, on s'intéresse au système linéaire

$$(L)\ :\ \left\{\begin{array}{ll} (2-\lambda)x - y + z & = 0 \\ x - \lambda y - z & = 0 \\ 2x - 4y - (1+\lambda)z & = 0 \end{array}\right. ,\quad \text{c'est-à-dire}\quad (A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Résoudre (L) lorsque $\lambda = 2$.
5. En supposant que $\lambda \neq 2$, montrer à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss que (L) est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x & -4y & -(1+\lambda)z & = 0 \\ & (2-\lambda)y & +\dfrac{\lambda - 1}{2}z & = 0 \\ & & \dfrac{cP(\lambda)}{2-\lambda}z & = 0 \end{array}\right.$$

   où $c \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.
6. Montrer que si λ est racine de P, alors (L) admet des solutions non nulles.
   En conclure que l'ensemble des valeurs propres de A est l'ensemble des racines de P.
7. Déterminer le cardinal de l'ensemble des racines de P :
   (i) dans $\mathbb{R}$
   (ii) dans $\mathbb{C}$
8. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Exercice 2

Pour tout réel $r \geqslant 1$, soit f_r la fonction définie sur $[0,1[$ par

$$f_r(x) = \frac{\exp(-rx)}{\sqrt{1-x}},$$

et l'on pose

$$I(r) = \int_0^1 f_r(x)dx.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f_r. Représenter sommairement son graphe pour $r = 8$.
2. Montrer que $I(r)$ est une intégrale convergente pour tout réel $r \geqslant 1$.

On écrit dans la suite $I(r) = I_1(r) + I_2(r) + I_3(r)$, avec

$$\begin{aligned}
I_1(r) &= \int_0^{r^{-2/3}} \exp(-rx)dx,\\
I_2(r) &= \int_0^{r^{-2/3}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)\exp(-rx)dx,\\
I_3(r) &= \int_{r^{-2/3}}^1 \frac{\exp(-rx)}{\sqrt{1-x}}dx.
\end{aligned}$$

3. Montrer que quand r tend vers l'infini, on a :

$$I_1(r) = \frac{1}{r}\big(1 + o(1)\big).$$

4. Montrer que pour tout réel y strictement compris entre 0 et 1, on peut écrire

$$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-y}} \leqslant 1 + \frac{y}{2(1-y)^{3/2}}$$

5. Montrer que pour tout $r \geqslant 1$,

$$0 \leqslant I_2(r) \leqslant c_2\left(1 - r^{-2/3}\right)^{-3/2}\frac{1}{r^{4/3}}$$

   où c_2 est une constante dont on précisera la valeur.
6. Montrer que pour tout $r \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant I_3(r) \leqslant c_3 \exp\left(-r^{1/3}\right),$$

   où c_3 est une constante dont on précisera la valeur.
7. En déduire que $I(r)$ est équivalent à $1/r$ quand r tend vers l'infini.

Exercice 3

On considère une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose qu'elles admettent une espérance $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue et une variance $\sigma^2 = \mathbb{V}ar[X_1] = 1$.
On cherche à estimer progressivement μ, en construisant récursivement une suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ d'estimateurs tels que M_n est une fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uniquement. Pour cela, on considère une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\gamma_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $0 < \gamma_n < 1$. On se propose d'étudier la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $M_1 = X_1$ et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$M_n = (1-\gamma_n)M_{n-1} + \gamma_n X_n.$$

Pour tout entier n strictement positif, on pose $v_n = \mathbb{V}ar[M_n]$.

1. Montrer que pour tout entier n strictement positif, on a $\mathbb{E}[M_n] = \mu$.
2. Dans cette question seulement, on considère la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :
$$\forall n \geqslant 1,\ \ \gamma_n = \frac{1}{n}.$$
Pour tout entier n strictement positif, montrer que l'on a :
$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n},$$
puis calculer v_n.
3. Dans cette question seulement, on suppose qu'il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \geqslant 2$, on ait $\gamma_n = \varepsilon$. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite qu'on exprimera en fonction de ε.
4. Montrer que pour tout entier n strictement positif,
$$M_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} X_k,$$
où, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{k,n}$ est défini par
$$a_{k,n} = \gamma_k \prod_{i=k+1}^{n} (1-\gamma_i),$$
avec par convention $\displaystyle\prod_{i=n+1}^{n} (1-\gamma_i) = 1$.
5. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}$?
6. Montrer que pour tout entier n strictement positif, on a
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^2.$$

Décroissance lente des poids.

Dans les questions 7 à 9, on suppose que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\gamma_n = n^{-1/4}$.

7. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(1-n^{-1/4})^{2j}}{\sqrt{n-j}}$$

8. Montrer que pour tout entier $j \geqslant 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\left(1-n^{-1/4}\right)^{2j} \leqslant \exp\left(-2jn^{-1/4}\right)$$

Conclusion.

Avertissement : La question 9 qui suit peut nécessiter de faire appel à un ou plusieurs résultats prouvés au cours de l'Exercice 2.

9. (a) Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note n^* le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1}{4}n^{1/4}$. Montrer que pour tout entier n strictement positif, on a

$$v_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-n^*-1} \frac{\exp\left(-2n^{3/4}j/n\right)}{\sqrt{1-j/n}} + n^* \exp\left(-2\left(n^{3/4}-\frac{1}{4}\right)\right).$$

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n \leqslant \sqrt{n} \int_0^1 \frac{\exp\left(-2n^{3/4}x\right)}{\sqrt{1-x}} dx + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right).$$

(c) Montrer que lorsque n tend vers l'infini, on a

$$v_n \leqslant \frac{1}{2n^{1/4}}\left(1+o(1)\right)$$

(d) Montrer qu'en fait, $v_n \sim \left(2n^{1/4}\right)^{-1}$.