COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ÉCRIT

Patricia Reynaud-Bouret, Gilles Stoltz

Coefficient : 3 ; **durée** : 4 heures

Commentaires généraux

Le sujet de cette année, comme celui des deux années précédentes, était long et couvrait une large partie du programme, en proposant un problème d'analyse, un exercice d'algèbre linéaire, ainsi qu'un exercice mêlant calcul des probabilités et algèbre linéaire. Comme toujours, nous ne nous attendions évidemment pas à ce qu'il soit répondu à toutes les questions dans une même copie ; les trois copies qui ont mérité 20 n'ont par exemple traité que les trois quarts du sujet environ. L'objectif est d'offrir aux candidats la possibilité de choisir quelque peu les domaines dans lesquels ils vont s'exprimer (entre analyse, algèbre et probabilités) ; bien traiter deux exercices ou le problème suffit largement à dépasser la moyenne.

Nous sommes très satisfaits du niveau général des candidats, en légère progression par rapport à ceux des années précédentes. Comme indiqué lors de la réunion avec les professeurs de classes préparatoires et comme rappelé en introduction au sujet, nous avons à la fois porté une grande attention à la rédaction et donné de nombreux points aux questions faciles (par exemple, questions 1 des exercices 1 et 2, ou preuve de l'indication de la question 2(d) de l'exercice 2) afin de mieux trier la masse des candidats faibles ou moyens. La répartition des notes s'en trouve changée, elle est plus proche d'une loi uniforme que d'une loi normale (elle était poissonnienne les années précédentes). Les candidats noteront avec plaisir une moyenne élevée, à 7.5, et les professeurs de classes préparatoires et autres membres du jury, un écart-type important, à 4.7, signe que l'épreuve a eu un rôle classant fort. Les quartiles se situent à 5, 8, et 11. En clair, un quart des étudiants a eu 11 ou plus, et les trois quarts, 5 ou plus. Seul le quart des étudiants, ceux qui n'ont sans doute jamais travaillé sérieusement la matière, se retrouvent en-dessous de 5. Nous espérons faire entendre le message suivant aux étudiants : l'importance de la matière et la facilité avec laquelle un travail sérieux et régulier saura être récompensé.

Le nombre de 0 mis (47 !) appelle un commentaire : si nous encourageons tous les étudiants à se battre contre le sujet et à essayer de répondre aux questions les plus faciles, en se concentrant quatre heures (et non pas en quittant la salle au bout d'une heure, comme nous le voyons trop souvent lorsque nous assistons à l'ouverture des sujets au centre francilien d'examen), nous ne rémunérons pas pour autant le papier et l'encre. Puisque nous avons noté avec soin la qualité de la rédaction cette année, des copies non blanches ont eu 0, la palme revenant à une copie de 16 pages où aucune assertion mathématique, aucun bout de raisonnement, n'étaient corrects. La moyenne des copies sans ces 47 zéros est de 8.4.

Au final, toutes les questions ont été résolues de manière satisfaisante par au moins un ou deux candidats, à l'exclusion de la moitié des questions de la partie 5 du problème, qui auraient demandé un peu de temps supplémentaire. Le niveau général des exercices et du problème nous semble parfaitement en adéquation avec le niveau moyen des candidats, et même avec les performances extrêmes des meilleurs ou moins bons d'entre eux. Nous ne pensons pas qu'il y ait lieu ni d'abaisser ni de relever le niveau d'interrogation. Toutes les parties au cœur du programme (ou presque) ont été balayées par le sujet, et celles qui ne l'ont pas été (entre autres parce qu'elles sont plus délicates : théorème de la limite centrale, fonctions de deux variables, extrema liés, etc.) sont tombées à l'oral. Nous espérons ainsi encourager les candidats, par cette diversité, à ne pas faire d'impasse, et les professeurs de classes préparatoires à traiter tout le programme (et rien que le programme : nous ne souhaitons plus voir, comme on le lira ci-dessous, de candidats parler de déterminant ou de polynômes annulateurs ; le programme est assez vaste pour suffire au bonheur des candidats et de leurs préparateurs).

Les commentaires et conseils des rapports, détaillés, des deux années précédentes restent d'actualité, et si nous ne résumons pas leur contenu ici, nous invitons nos lecteurs à les consulter et méditer à nouveau.

Commentaires plus spécifiques

Sur l'ensemble du sujet. La rédaction (sa précision : donner tous les arguments nécessaires, sa concision : ne donner que des arguments utiles à la démonstration) est un élément essentiel d'appréciation en mathématique, où bien souvent la réponse se trouve dans la question et où il s'agit davantage d'établir la preuve d'un résultat. Les ellipses, les affirmations sans justifications, les répétitions, les ambiguïtés, les absences de conclusion franches sont toutes sanctionnées.

Grâce à nos remarques des années passées, le symbole d'équivalence $\Leftrightarrow$ est un peu moins présent (et lorsqu'il l'est, il l'est à bon escient une fois sur deux). Nous recommandons cependant encore de s'abstenir de l'employer et de rédiger les articulations des raisonnements à l'aide de conjonctions de coordination ou de subordination ("donc", "par conséquent", ou, selon le contexte, "si", "seulement si", "si et seulement si"). Les abréviations sont elles aussi moins présentes et les copies, bien présentées et bien numérotées : que les candidats continuent dans cette voie !

Exercice I. Cet exercice d'algèbre linéaire se proposait de résoudre l'équation $u \circ u = -\mathrm{id}_E$, où l'inconnue est un endomorphisme u d'un espace vectoriel E. La solution générale, que les professeurs de classes préparatoires pourront montrer à leurs étudiants, existe si et seulement si la dimension de E est paire, et elle est unique à changement de base près. Pour simplifier les choses, cet exercice ne s'intéressait qu'au cas des dimensions comprises entre 1 et 4. Le passage de la dimension 2 à la dimension 4 (objet de la question 5) met notamment en œuvre tous les ingrédients que l'on retrouve dans le cas général, lorsqu'il s'agit de prouver l'hérédité d'une certaine propriété dans le cadre d'un raisonnement par récurrence. On a pu constater dans cet exercice les lacunes concernant le maniement des bases et la définition de la notion de valeurs propres.

– Question 1 : cette question, très facile, illustre bien comment des lacunes de rédaction peuvent conduire à des énoncés faux ou ambigus alors même que l'intuition des candidats peut être bonne. Ainsi, écrire "$\forall x,\ u^2(x) = -x$ donc -1 est valeur propre de u^2" est insatisfaisant ; il faut conclure "donc -1 est l'*unique* valeur propre de u^2". La question était bien de dresser la liste de toutes les valeurs propres de u^2, il ne suffit pas d'en proposer une. Rédiger sa réponse comme "$\forall x,\ u^2(x) = -x \ \Leftrightarrow\ \lambda = -1$" est évidemment impardonnable : le jury attend une phrase de conclusion en toutes lettres, qui montre que le candidat sait interpréter la formule mathématique.
  Dans la seconde partie de la question, beaucoup pensent à un raisonnement par l'absurde et arrivent à prouver que l'existence d'une valeur propre λ pour u équivaut à ce que $\lambda^2 = -1$. Là encore, on ne peut pas se contenter de cette équivalence, ni même de la commenter laconiquement par "or cela est impossible", mais il faut écrire en toutes lettres : "cette dernière égalité n'ayant pas de solution réelle, c'est que u n'admet pas de valeur propre".
  Certains candidats écrivent que la définition d'une valeur propre λ d'un endomorphisme u est le fait que pour tout x, on ait $u(x) = \lambda x$. Cela leur permet de conclure en toute bonne foi que u^2 admet -1 comme unique valeur propre et que u n'en admet pas, mais nous oblige à les sanctionner pour cette ignorance de la définition véritable. Cela étant, c'est tout de même mieux que ceux qui ne savent même pas qu'une valeur propre est un scalaire et proposent comme spectre de u l'ensemble $\{u^2, -id_E, 1\}$ ou la matrice nulle 2×2.
  Deux commentaires enfin concernant un nombre petit, mais significatif, d'étudiants. D'une part, ceux confondant les assertions "il n'y a pas de valeurs propres" et "il n'y a pas de valeurs propres nulles" ont montré que u est bijectif pour en déduire qu'il n'a pas de valeurs

propres. D'autre part, on a encore croisé des polynômes annulateurs, sous la forme suivante : X^2+1 est un polynôme annulateur de u et n'admet pas de racine réelle, c'est donc que u n'admet pas de valeur propre. Ce raisonnement est évidemment correct, mais c'est user d'un marteau-piqueur pour tuer une mouche. Nous répétons ici encore avec force (comme les années précédentes) que la notion de polynôme annulateur n'est pas au programme, et qu'elle se retrouve presque uniquement dans des copies par ailleurs très faibles.

- Question 2 : Une grande majorité de candidats se sont contentés de montrer que pour tout $x \in E$, il existe λ (dépendant donc de x) tel que $u(x) = \lambda x$. On attendait bien sûr ensuite une preuve sur le fait que ce λ ne dépend pas du vecteur x choisi.
  On a également accepté le raisonnement suivant. Un endomorphisme est représenté, dans un espace de dimension 1, par une matrice de la forme $[\lambda] = \lambda[1]$, qui est la représentation matricielle de $\lambda \mathrm{id}_E$.
  On prendra également garde, dans la rédaction, au fait que E, même si c'est un espace vectoriel réel de dimension 1, n'est pas nécessairement égal à $\mathbb{R}$.
- Question 3 : Le traitement de cette question a souvent été extrêmement fantaisiste. Un nombre vraiment impressionnant d'étudiants par ailleurs pas trop mauvais ont multiplié ou divisé par des vecteurs, voire les ont élevés au carré. Il s'agissait pourtant de composer par u (comme à la première question) pour obtenir une autre équation, puis de combiner les deux pour faire disparaître le terme en $u(x)$.
  D'autres ont utilisé le fait que la famille était libre pour montrer qu'elle était libre, en partant de l'indication de prendre λ et μ tels que $\lambda x + \mu u(x) = 0$, ce qui après calculs les a amenés à $(\lambda - \mu)x + (\mu + \lambda)u(x) = 0$, où ils ont parlé d'identification des coefficients pour parvenir au système $\lambda - \mu = 0$ et $\mu + \lambda = 0$, soit $\lambda = \mu = 0$.
  En revanche, on a beaucoup apprécié ceux qui se ramenaient à la question 1 à partir de l'indication, en remarquant que si on avait $\mu \neq 0$, alors $-\lambda/\mu$ serait valeur propre de u.
- Question 4 : Parmi ceux qui avaient réalisé que la première partie de la question se déduisait quasiment immédiatement de la question précédente, rares ont été ceux qui ont compris le sens de la seconde partie (faire une synthèse), et se sont contentés de conclure par "Les endomorphismes u recherchés sont les endomorphismes qui dans la base $\mathcal{B}$ construite précédemment ont la forme $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$", alors qu'il s'agissait de vérifier que convenaient tous les endomorphismes admettant une telle représentation dans une base quelconque de E.
- Question 5 : Une faute tout à fait typique est ici de penser que pour prouver qu'un système de vecteurs $(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4)$ est libre, il suffit de prouver que ses éléments sont libres trois à trois, ou même seulement deux à deux. Le contre-exemple est le système lié $(e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_1 + e_2 + e_3)$, construit à partir d'une famille libre $(e_1,\, e_2,\, e_3)$.
  Avant de s'atteler à montrer que $(x,\, u(x),\, y,\, u(y))$ est libre, il ne faut pas oublier de dire qui est y ! L'énoncé donne x mais y est au choix judicieux du candidat.
- Question 6 : Ont été récompensées au moins un peu ceux qui réalisaient que le raisonnement de la question 5 s'appliquait ici encore et conduisait à un système libre à quatre éléments – et ce, même si le raisonnement qu'ils y avaient exhibé était imprécis ou incorrect.

Exercice II. Nous avons jugé bon de proposer un second exercice mettant en jeu des notions d'algèbre linéaire, sur la remarque faite à la réunion du jury selon laquelle cette dernière est entièrement introduite en classes préparatoires et donc souvent mieux maîtrisée que l'analyse. Nous avons cependant tenu à la mêler à du calcul des probabilités simple, pour aboutir à un exercice portant sur des matrices aléatoires, testant, en particulier, les capacités des candidats à traiter des objets d'un type nouveau. Les problèmes principalement rencontrés par les candidats concernent les conditions, nécessaires et/ou suffisantes, d'inversibilité des matrices 2×2.

Nous répétons cette année encore que Bernoulli ne prend qu'un seul i ; les copies qui rajoutent un i et l'écrivent comme le mot nouille sont généralement très faibles en probabilités. Cela n'est pas surprenant : cette faute d'orthographe dénote un manque de familiarité avec la loi la plus simple des probabilités.

- Question 1 : Nous avons été surpris par la diversité des réponses, alors même que la plupart des étudiants finissaient, à la question 2(b), par écrire les 16 matrices possibles. Il nous a été proposé comme nombres de valeurs possibles : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 64, 180, 216, 256, 284, 10^4, 8!, et même, $1-p$ et p^4.
  Nous avons également été circonspects devant ceux qui proposaient $16 = 4^2$ (jetant le doute sur ceux qui mettaient 16 sans plus de justifications) et un peu bienveillants envers ceux qui suggéraient $2^4 = 8$, 32 ou 64. Dans tous les cas, la justification attendue et donnant le nombre maximal de points était "$2^4 = 16$".
  A la seconde partie de la question, presque la moitié des candidats ayant trouvé 16 valeurs ont proposé une probabilité de 1/16, comme s'il ne pouvait y avoir de probabilité qu'uniforme sur des ensembles inhabituels. Souvent, ces mêmes candidats traitaient pourtant la question 2(c) de manière raisonnable, mais sans revenir en arrière et corriger leur erreur ici.
- Question 2(a) : Des candidats sont tombés dans un piège tendu par nos notations (piège que nous n'avions absolument pas prévu !) et ont cru que la probabilité q valait $q = 1-p$... D'un point de vue linguistique, les étudiants passent parfois allègrement de "presque sûr" à "quasi certain" où à "quasi nul", cette dernière expression nous ayant laissés particulièrement perplexes.
- Question 2(b) : Comme souvent, s'agissant d'une équivalence à prouver, trop de candidats ne montrent qu'un seul sens, en l'occurrence, le sens direct ici, alors même que c'est le sens réciproque qui est intéressant. Encore une fois, nous ne saurions que trop recommander de séparer les deux implications réciproque et directe lors de la rédaction.
  Une manière simple et concrète de procéder pour l'implication réciproque est d'écrire explicitement les six matrices possibles et de se rendre compte qu'elles sont toutes de rang 2. Certains de ceux voulant procéder ainsi ne considèrent que deux matrices, pensant à tort que si les colonnes sont différentes, c'est que simultanément $a_1 \neq a_3$ et $a_2 \neq a_4$.
  Beaucoup de candidats utilisent ici (et même déjà pour résoudre la question précédente, ce qui revient, une fois de plus, à utiliser un marteau-piqueur pour écraser une mouche) la condition nécessaire et suffisante d'inversibilité donnée par le déterminant, $a_1a_4 - a_2a_3 \neq 0$. Si bien sûr une telle caractérisation est parfois utile, ce n'est pas le cas ici, et elle trouble bien plus les candidats qu'elle ne les guide vers la voie de la résolution. Bien évidemment, le déterminant n'étant explicitement pas au programme, nous ne nous attendrons jamais à ce qu'une caractérisation de ce genre soit sue. Si elle devait être utilisée, une question préliminaire permettrait de l'exhiber (voir à cet effet l'exercice 2 de la planche d'oral numéro 15).
  Une erreur que beaucoup de professeurs de classes préparatoires connaissent et cherchent à éradiquer en vain est qu'une matrice est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls. Cela ne vaut évidemment que lorsque la matrice est triangulaire, ce qui n'était pas le cas ici.
- Question 2(c) : Peu sont arrivés au bon résultat, alors que là encore, il suffisait d'écrire les six matrices et de déterminer la probabilité de chacune. Ceux qui n'avaient vu que deux matrices inversibles à la question précédente parvenaient à la probabilité $2p^2(1-p)^2$ et soit passaient sous silence la différence avec l'énoncé, soit nous annonçaient doctement une erreur d'énoncé, mais jamais ne remettaient en cause leur raisonnement. Le maniement des unions ou des intersections d'événements laisse toujours à désirer : la probabilité qu'aucune colonne ne soit nulle n'est pas $2p^2$, la somme des probabilités que chacune soit non nulle ; il n'est pas vrai qu'une pseudo-indépendance montre que la probabilité que les colonnes soient non nulles et différentes est le produit des probabilités que la première et la seconde soient non nulles par celle qu'elles soient différentes.
- Question 2(d) : Ici, tous ou presque ont su montrer que $x(1-x) \leq 1/4$, et cela a été récompensé. (On a apprécié les raisonnements disant que cette inégalité équivaut à $(x -$

$1/2)^2 \geq 0$, ils sont plus rapides et plus efficaces que les études de fonctions.)
L'application de cette inégalité pour montrer que $q \leq 1/2$ a également été monnaie courante. En revanche, peu ont compris qu'il fallait également montrer que $q \leq p$.

– Question 3(a) : La résolution de cette question a montré les mêmes erreurs de raisonnement qu'en 2(b). Ici encore, il fallait séparer implications directe et réciproque. Pour l'implication réciproque, beaucoup ont esquissé un raisonnement par récurrence, mais peu en ont procuré une version satisfaisante.
  Le point-clé était de montrer que si un produit de deux matrices était inversible, alors chacune l'était. Le plus simple était d'en revenir au fait qu'une matrice 2×2 est inversible si et seulement si son rang (la dimension de son image) est 2. L'un ou l'autre est passé par le déterminant, ce que le jury a peu goûté, car ils sont explicitement hors-programme.
– Question 2(b) : Dans la première partie de la question, il était essentiel d'expliquer pourquoi les M_j étaient indépendantes. Dans la seconde partie, nous n'avons pas accordé de points à ceux qui disaient "$q^n \to 0$ car $q \in [0,1]$" ; il fallait évidemment dire $0 \leq q < 1$ (ou même $\leq 1/2$) en faisant référence explicitement au résultat de la question 2(d).

Problème. Le problème, très classique, étudiait les polynômes de Tchebychev et leurs propriétés de polynômes interpolateurs. Le jury s'attendait à ce que la partie 2 ait peut-être été vue en classe ; au vu des réponses obtenues, cela ne semble pas avoir été le cas, ou tout du moins, les étudiants n'en avaient plus souvenir et se comportaient comme face à un problème nouveau. De manière générale, et comme indiqué plus haut, il semble bien que l'analyse soit moins appréciée par les étudiants moyens que l'algèbre.

– Partie 1 : Les étudiants connaissent bien leurs formules trigonométriques, et même un peu trop bien : les formules d'addition comme $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ ne sont pas à mémoriser, selon le programme. Si les questions 1 et 3 ont souvent été traitées, la question 2 a généralement laissé les candidats muets ou balbutiants (on a vu de nombreuses tentatives de raisonnement par récurrence), alors même que les formules du binôme et de Moivre avaient été rappelées deux lignes auparavant.
– Partie 2, question 1 : Par expérience, le jury sait que ce genre de questions (quasiment de cours) sera très pénible à corriger, et le moins que l'on puisse dire, est que les candidats ne lui facilitent pas la tâche. Malheureusement pour nous, c'est quasiment un passage obligé pour trier les candidats.
  Au vu des réponses produites, les points portaient essentiellement sur la vérification de la propriété de linéarité, du fait que si P et Q sont deux éléments de l'espace et que λ est réel, alors $\lambda P + Q$ est encore dans l'espace. (Cela revient à montrer que les deux espaces sont sous-espaces vectoriels de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Attention, il était attendu de ceux qui employaient cette méthode de dire de qui ils vérifiaient que $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ étaient sous-espaces vectoriels, or on a souvent vu qu'ils étaient sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$...)
  P et Q ne devaient pas être nécessairement de degré n ni même de même degré pour la vérification que $\mathbb{R}[X]$ est un (sous-)espace vectoriel ; à vrai dire, beaucoup de candidats ont ainsi écrit quasiment signe pour signe la même démonstration pour $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$, comme si les degrés n'intervenaient pas.
  La bonne manière de faire pour montrer que $\lambda P + Q$ est un polynôme est de choisir x et de calculer $\lambda P(x) + Q(x) = \ldots$, pour remarquer que l'on tombe bien encore sur un polynôme. En aucun cas la preuve ne doit commencer par $(\lambda P + Q)(x) = \ldots$, parce que l'on ne sait pas encore que l'objet $\lambda P + Q$ existe (est bien défini). Elle doit se finir avec cette ligne et l'indication des coefficients que l'on lit pour $\lambda P + Q$.
  On a vu des preuves montrant que $P \times Q$ est un polynôme (c'est vrai, mais cela n'est pas nécessaire pour un espace vectoriel, c'est une propriété d'anneau), d'autres considérant $P(\lambda x) + Q(x)$ ou $\lambda P(x) + Q(y)$.
  Ces longs commentaires sur cette première partie de question très facile sont destinés aux candidats futurs, qui peuvent compter sur la présence d'une question de ce type dans chacun des prochains sujets et seraient bien inspirés d'apprendre à en rédiger des réponses

complètes (pour engranger des points faciles) et concises (pour gagner du temps).
Enfin, s'agissant de la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, on a souvent vu la bonne valeur $n+1$ et parfois seulement les valeurs n et $+\infty$.

- Partie 2, questions 2 et 5 : A la question 2, la bonne justification consistait à faire référence de manière précise à la question 1 de la partie 1. Dans les deux questions, il fallait donner un polynôme $P(x)$ ou $P_j(x)$, et non pas $P(\cos\theta)$ ou $P_j(\cos\theta)$.
- Partie 2, question 3 : Certains ont tellement peu compris l'énoncé que pour eux, on avait tout simplement $P_n = \cos(n\theta)/\cos(\theta)$. Pour les autres, ceux qui exhibaient le bon P_n, on ne demandait ni son degré ni son coefficient dominant, puisque c'était l'objet des questions suivantes. Certains ont pourtant essayé d'en proposer dès ici.
- Partie 2, question 4 : Beaucoup de candidats se sont contentés de dire qu'alors $P_n(\cos\theta) = Q(\cos\theta)$ et que cela entraînait que $P_n = Q$ (par une sorte d'identification magique, toujours passée soigneusement sous silence). Très peu de candidats ont noté que cette égalité impliquait en fait que Q et P_n avaient une infinité de racines en commun et étaient donc égaux.
- Partie 2, question 6 : Le réflexe quasi-pavlovien du raisonnement par récurrence dès qu'il s'agit de prouver une propriété valable pour tout entier naturel a empêché la plupart des candidats de remonter un peu plus haut dans l'énoncé et d'appliquer la question 3 de la partie 1, qui donnait directement le résultat.
- Partie 2, question 7 : Ici, la récurrence (forte ou au moins double) s'imposait, mais il fallait faire attention à sa mise en œuvre et à la formulation de l'hypothèse. Beaucoup n'ont absolument pas vu qu'il fallait initier les résultats aux rang $n = 1$ et $n = 2$ par exemple. On a souvent lu des récurrences descendantes (ou en sandwich), le cas n (ou les cas n et $n-2$) impliquant le cas $n-1$.
- Partie 2, question 8 : On attendait l'expression-clé "famille étagée donc libre", alliée à la remarque qu'elle était de cardinal la dimension de l'espace. (Les formulations comme "polynômes de degrés deux à deux différents", quoique vraies et impliquant la liberté, ont été un peu moins appréciées.) Cela n'a finalement pas été, pour cette question facile, aussi fréquent que ce que l'on pouvait espérer.
- Partie 3 : L'objet de cette partie était de tester les connaissances des candidats sur les notions de dérivabilité. Elle a été peu abordée, car vite abandonnée (au profit de la partie 4). Le résultat essentiel, exhibé à la question 5, pouvait se déduire sans les questions 1 à 4, simplement en notant que ce maximum était celui de $|\cos(n\theta)|$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$.
- Partie 3, question 1 : Que les r_k soient racines a souvent été prouvé, qu'il n'y en ait pas d'autres a été montré en affirmant qu'il y en avait autant que le degré de P. On aurait apprécié, mais cela n'a été vu qu'une fois ou deux, une explication indiquant pourquoi les r_k sont tous distincts : ce n'est pas parce qu'ils sont définis par des expressions différents qu'ils ne peuvent être égaux (ainsi, on a par exemple $\cos(2\pi) = \cos 0$...).
- Partie 3, question 2 : On a eu droit à plusieurs parties de raisonnement intéressantes, qui mises bout à bout auraient donné une solution complète, mais curieusement, aucun candidat n'a su combiner seul tous ces arguments : P' s'annule au moins $n-1$ fois sur $]-1,1[$ (par la question 1 et le théorème de Rolle), et au plus $n-1$ fois car P' est de degré $n-1$. On a apprécié les dessins.
- Partie 3, question 3 : Peu ont réalisé, lors de la dérivation, que $P(\cos\theta)$, comme fonction de θ, est la fonction composée $P \circ \cos$.
- Partie 3, questions 4 et 5 : Si l'on utilise un argument variationnel, il ne faut pas oublier d'étudier aussi les valeurs de P aux bords 1 et -1 de l'intervalle $[-1,1]$.
- Partie 4 : Les questions 1 et 4(a) de cette partie ont été résolues par de nombreuses copies, même faibles. Les candidats ont ainsi pu ré-enchaîner suite à une fin de partie 2 ou une partie 3 mal traitées. On a lu avec plaisir que les L_j étaient des polynômes d'interpolation de Lagrange. A la question 4(a), le mieux était d'écrire en toutes lettres que tout c convenait plutôt que d'écrire des tautologies du type "$0 = 0$".

- Partie 4, question 2 : Contrairement à la question 8 de la partie 2, il ne s'agit pas ici d'un argument d'échelonnement, tous les polynômes considérés ayant le même degré $n-1$.
- Partie 4, question 3 : L'unicité de Q a souvent été bien vue, contrairement à son existence. Là encore, on conseille aux candidats de bien séparer les raisonnements pour l'existence et pour l'unicité et d'indiquer clairement à chaque fois laquelle des deux est étudiée. Cette question a été mieux traitée qu'une de ses jumelles, la question 4 de la partie 2.
- Partie 4, question 4 : Les calculs de $g_x^{(n)}$ ont souvent été fantaisistes, les étudiants ne sachant plus du tout par rapport à quoi ils dérivaient.
- Partie 5 : Elle a été très peu abordée, et uniquement par des copies moyennes (voulant grapiller des points) ou bonnes. Pour la première partie de la question 1, on attendait, comme peu vu à la question 5 de la partie 3, un argument de continuité, il était inutile et même contre-productif de parler de variations. La seconde partie de la question 1, les questions 3(b) et 4 n'ont été résolues par aucun candidat, entre autres par manque de temps.