10.1 Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 te^{-t^2}dt$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1dt$
6. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}dt$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

1. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt.$

   La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.

   Soit $x > 0$. Alors
   $$\int_0^x e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^x = -e^{-x} + e^0 = 1 - e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est donc convergente et on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$

2. Convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$

   La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0,1[$, on a donc a priori uniquement un problème en 1.

   Soit $x \in [0,1[$. Alors
   $$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -2\int_0^x \frac{-1}{2\sqrt{1-t}}dt = -2\Big[\sqrt{1-t}\Big]_0^x = -2\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1}\right) = 2-\sqrt{1-x} \underset{x\to1}{\longrightarrow} 2$$
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ est donc convergente et on a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2.$

3. Convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$

   La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.

   Soit $x \geqslant 1$. Alors
   $$\int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+t^2}\right]_1^x = -\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$
   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$ est donc convergente et on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{4}.$

4. Convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} te^{-t^2}dt$

La fonction $t \mapsto te^{-t^2}$ est continue sur $]-\infty, 0]$, on a donc a priori uniquement un problème en $-\infty$.

Soit $x \in]-\infty, 0]$. Alors

$$\int_x^0 te^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_x^0 (-2t)e^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_x^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x^2} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} te^{-t^2}dt$ est donc convergente et on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} te^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}$.

5. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1dt$

La fonction $t \mapsto 1$ est continue sur $[0, +\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.

Soit $x \geqslant 0$. Alors

$$\int_0^x 1dt = \Big[t\Big]_0^x = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1dt$ est donc divergente.

6. Convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}dt$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{3^t} = \dfrac{1}{e^{t\ln(3)}} = e^{-t\ln(3)}$ est continue sur $[2, +\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.

Soit $x \geqslant 2$. Alors

$$\int_2^x \frac{1}{3^t}dt = \frac{-1}{\ln(3)}\int_2^x (-\ln(3))e^{-t\ln(3)}dt = -\frac{1}{\ln(3)}\Big[e^{-t\ln(3)}\Big]_2^x = -\left(\frac{e^{-x\ln(3)} - e^{-2\ln(3)}}{\ln(3)}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-2\ln(3)}}{\ln(3)}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}dt$ est donc convergente et on a : $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}dt = \frac{1}{9\ln(3)}$.

7. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$

La fonction $t \mapsto te^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.

Soit $x > 0$. Calculons $\displaystyle\int_0^x te^{-t}dt$.

On pose $\left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{array}\right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{array}\right.$. Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, on peut faire une intégration par parties :

$$\int_0^x te^{-t}dt = \Big[-te^{-t}\Big]_0^x - \int_0^x -e^{-t}dt = -xe^{-x} + \Big[-e^{-t}\Big]_0^x = -\frac{x}{e^x} - e^{-x} + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ est donc convergente et on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 1$.

8. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.

Soit $x > 0$. Alors :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \Big[\text{Arctan}(t)\Big]_0^x = \text{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est donc convergente et on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

10.2 Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-5}{t^2+4t+4}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln(t)}{t+4}dt$
6. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t^2-t}dt$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt.$
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}dt$
9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$
10. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt.$
11. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{t-1}dt.$
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}dt$

1. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}}dt$

La fonction $u : t \mapsto 5t^3+3t^2+7$ est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$ (fonction polynômiale) et $\forall t \geqslant 0,\ u'(t) = 15t^2+6t = 3t(5t+2) \geqslant 0$. La fonction u est donc croissante et puisque $u(0) = 7$, elle est strictement positive sur $[0,+\infty[$ et ne s'annule donc jamais sur $[0,+\infty[$.

La fonction $f : t \mapsto \sqrt{\dfrac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}}$ est donc continue et positive sur $[0,+\infty[$ comme composée de fonctions continues. Il y a a priori uniquement un problème en $+\infty$.

Or;

$$\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2t}{5t^3} = \frac{2}{5t^2}$$

donc

$$f(t) = \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{5}}\frac{1}{t}$$

Donc par le théorème d'équivalence des fonctions positives, les intégrales $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ sont de même nature. Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge (Intégrale de Riemann). On en déduit donc que

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt \text{ diverge}$$

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} f(t)dt$ converge (intégrale sur un segment d'une fonction continue) et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge, on conclut que :

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}}dt \text{ diverge}$$

2. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-5}{t^2+4t+4}dt$

La fonction $f : t \mapsto \frac{t-5}{t^2+4t+4} = \frac{t-5}{(t+2)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Sur $[5, +\infty[$, la fonction f est continue et positive, et on a

$$f(t) = \frac{t-5}{t^2+4t+4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$$

Puisque $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge (Intégrale de Riemann), on en déduit par le théorème d'équivalence des fonctions positives que l'intégrale $\displaystyle\int_5^{+\infty} f(t)dt$ diverge également.

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 f(t)dt$ converge (intégrale sur un segment d'une fonction continue) et que $\displaystyle\int_5^{+\infty} f(t)dt$ diverge, on conclut que :

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt \text{ diverge}$$

3. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2+1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On a a priori un problème en 0 et en $+\infty$.

- Etude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$.
  La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2+1}$ est continue et négative sur $]0, 1]$. De plus,
  $$f(t) = \frac{\ln(t)}{t^2+1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\ln(t)}{1} = \ln(t)$$
  et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ converge, donc par théorème d'équivalence des fonctions négatives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$ converge également.
- Etude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$.
  La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2+1}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. De plus,
  $$f(t) = \frac{\ln(t)}{t^2+1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2}$$
  donc par théorème d'équivalence des fonctions négatives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$.
  Cherchons un $\alpha > 1$ tel que $\dfrac{\ln(t)}{t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$:
  $$\frac{\ln(t)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \iff t^\alpha \frac{\ln(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \frac{\ln(t)}{t^{2-\alpha}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff 2-\alpha > 0 \iff \alpha < 2$$
  Il suffit de choisir un $\alpha \in]1, 2[$, par exemple $\alpha = \dfrac{3}{2}$.
  $$\frac{\ln(t)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}dt$ converge (Intégrale de Riemann), donc par théorème de négligeabilité de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$ converge, et enfin par équivalence de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$ converge également.

- Puisque $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ convergent, on en déduit donc que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt \text{ converge}$$

4. <u>Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$</u>

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.
De plus,

$$t^2 e^{-t^2} = \frac{t^2}{e^{t^2}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (Intégrale de Riemann), on en déduit par négligeabilité de fonctions positives que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.
Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}dt$ ne pose pas de problème (intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, 1]$), par somme on a que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \text{ converge}$$

5. <u>Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln(t)}{t+4}dt$</u>

La fonction $t \mapsto \dfrac{2+\ln(t)}{t+4}$ est continue sur $]0, +\infty[$, on a donc a priori des problèmes en 0 et en $+\infty$

- Etude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{2+\ln(t)}{t+4}dt$.

  La fonction $t \mapsto \frac{2+\ln(t)}{t+4}$ est continue sur $]0, 1]$ (mais pas forcément positive) et

$$\left|\frac{2+\ln(t)}{t+4}\right| \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{|\ln(t)|}{4}$$

  Or, $\displaystyle\int_0^1 |\ln(t)|dt$ converge, donc par théorème d'équivalence des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{2+\ln(t)}{t+4}\right| dt$ converge et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2+\ln(t)}{t+4}dt$ converge également.

- Etude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\ln(t)}{t+4}dt$.

  La fonction $t \mapsto \frac{2+\ln(t)}{t+4}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et positive, et

$$\frac{2+\ln(t)}{t+4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$$

Or, pour $x > 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_1^x = \frac{(\ln(x))^2}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}dt$ est divergente. On en déduit par théorème d'équivalence des fonctions positives que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\ln(t)}{t+4}dt$ diverge également.

- Puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{2+\ln(t)}{t+4}dt$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\ln(t)}{t+4}dt$ diverge, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln(t)}{t+4}dt \text{ diverge}$$

6. Convergence de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2-t}dt$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-t}$ est continue et positive sur $]1,2]$, donc il n'y a de problème qu'en 1.
On a :

$$\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t(t-1)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{t-1}$$

Or, pour $x \in]1,2]$,

$$\int_x^2 \frac{1}{t-1}dt = \Big[\ln(t-1)\Big]_x^2 = \ln(1) - \ln(x-1) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t-1}dt$ est donc divergente, et par théorème d'équivalence des fonctions positives, on en déduit que

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2-t}dt \text{ diverge}$$

7. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, il y a donc a priori deux problèmes en 0 et $+\infty$.

- Etude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$.

  La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ mais pas forcément positive. On regarde l'absolue convergence. On a :

$$\forall t \geqslant 1,\ \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

  Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente (Intégrale de Riemann), donc par théorème de comparaison des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right|dt$ converge, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ converge.

- Etude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2}dt$.

  Sur $]0,1]$, $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue et positive. De plus,

$$\frac{\sin(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge (Intégrale de Riemann) et par théorème d'équivalence des fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ diverge également.

- Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ converge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ diverge, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt \text{ diverge}$$

8. Convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}dt$

La fonction $t \mapsto t^3+3t^2+t = t(t^2+3t+1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0, $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, donc ne s'annule qu'une seule fois sur l'intervalle $[0,1]$: en 0.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}$ est donc continue et positive sur $]0,1]$. De plus,

$$\frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}}$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}dt$ converge (Intégrale de Riemann), donc par théorème d'équivalence des fonctions positives, on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}dt \text{ converge}$$

9. Convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$

La fonction $t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$, on a un problème uniquement en $+\infty$. De plus,

$$\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (Intégrale de Riemann), donc par théorème d'équivalence des fonctions positives, on en déduit que

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \text{ converge}$$

10. Convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.

Cherchons un $\alpha > 1$ tel que $\displaystyle\frac{\ln(t)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$:

$$\frac{\ln(t)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \Longleftrightarrow t^\alpha\frac{\ln(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln(t)}{t^{2-\alpha}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow 2-\alpha>0 \Longleftrightarrow \alpha<2$$

Il suffit de choisir un $\alpha \in]1,2[$, par exemple $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

$$\frac{\ln(t)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}dt$ converge (Intégrale de Riemann), donc par théorème de négligeabilité de fonctions positives, on en déduit que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt \text{ converge}$$

11. Convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$. On a a priori des problèmes en 0 et 1.

– Etude de $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln(t)}{t-1}dt$.
La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t-1}$ est continue et positive sur $]0,1/2]$. De plus :

$$\frac{\ln(t)}{t-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} -\ln(t)$$

et $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln(t)dt$ converge, donc par théorème d'équivalence des fonctions positives, on en déduit que

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(t)}{t-1}dt \text{ converge}$$

– Etude de $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$.
La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t-1}$ est continue et positive sur $[1/2,1[$. De plus :

$$\frac{\ln(t)}{t-1} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t-1}{t-1} = 1$$

Ainsi, la fonction est prolongeable par continuité en 1. On a donc une intégrale faussement impropre sur $[1/2,1]$: l'intégrale converge.

– Par somme, puisque $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ et $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ convergent, on a bien que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt \text{ converge}$$

12. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}dt$

La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}$ est continue (mais pas forcément positive) sur $]0,+\infty[$. On regarde donc l'absolue convergence.

– Etude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}dt$.
La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}$ est continue et positive sur $]0,1]$. De plus,

$$\frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge (Intégrale de Riemann), donc par critère d'équivalence des fonctions positives, on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}} \text{ converge}$$

– Etude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}dt$.
La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. De plus,

$$\left|\frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e^t-1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e^{t/2}} = e^{-t/2} \leqslant e^{-t}$$

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, donc par comparaison, puis équivalence, puis comparaison des fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}\right| dt$ converge, donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}dt \text{ converge}$$

– Par somme, puisque $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}dt$ convergent, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}dt \text{ converge}$$

10.3 Déterminer la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t}dt$ selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-at}}{1+e^t}dt$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. On a donc deux problèmes à étudier : en $-\infty$ et $+\infty$.

- Etude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t}dt$.

$$\frac{e^{-at}}{1+e^t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-at}}{e^t} = e^{(-a-1)t}$$

Donc par théorème d'équivalence des fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t}dt$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} e^{(-a-1)t}dt$.
Or, pour $x > 0$, si $a \neq 1$,

$$\int_0^{x} e^{(-a-1)t} = \left[\frac{1}{-a-1}e^{(-a-1)t}dt\right]_0^x = \frac{e^{(-a-1)x}-1}{-a-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{a+1} & \text{si } a > -1 \\ +\infty & \text{si } a < -1 \end{array}\right.$$

et si $a = 1$, on a clairement $\int_0^{+\infty} e^0 dt = \int_0^{+\infty} 1dt$ qui diverge.
Ainsi, en conclusion :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^t}dt \text{ converge } \iff a > -1$$

- Etude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-at}}{1+e^t}dt$.

$$\frac{e^{-at}}{1+e^t} \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{e^{-at}}{1} = e^{-at}$$

Donc par théorème d'équivalence des fonctions positives, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-at}}{1+e^t}dt$ est de même nature que $\int_{-\infty}^{0} e^{-at}dt$.
Or, pour $x < 0$, si $a \neq 0$,

$$\int_x^{0} e^{-at} = \left[\frac{1}{-a}e^{-at}dt\right]_x^0 = \frac{1-e^{-ax}}{-a} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \left| \begin{array}{ll} \frac{-1}{a} & \text{si } a < 0 \\ +\infty & \text{si } a > 0 \end{array}\right.$$

et si $a = 0$, on a clairement $\int_{-\infty}^{0} e^{0}dt = \int_{-\infty}^{0} 1dt$ qui diverge.
Ainsi, en conclusion :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-at}}{1+e^{t}}dt \text{ converge } \iff a < 0$$

- En conclusion, on obtient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+e^{t}}dt \text{ converge } \iff -1 < a < 0$$

10.4

1. Montrer que $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ sont convergentes et opposées (on pourra effectuer le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$).
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$

1. <u>Convergence de $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$</u>

   La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue et négative sur $]0,1]$. De plus,

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$$

   et $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(t)dt$ converge, donc par critère d'équivalence des fonctions négatives, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ converge.

   <u>Convergence de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$</u>

   La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[1+\infty[$.
   De plus,

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2} = \underset{t\to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

   Or, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}dt$ converge, donc par critère de négligeabilité de fonctions positives, on en déduit que $\dfrac{\ln(t)}{t^2}dt$ converge, et enfin par critère d'équivalence des fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ converge.

   Soit $x \in]0,1]$. Calculons $\displaystyle\int_{x}^{1} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$.
   On pose $\forall t \in [x,1], \varphi(t) = \frac{1}{t}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,1]$ et $\forall t \in [x,1], \varphi'(t) = \frac{-1}{t^2}$.
   De plus, si $u = \frac{1}{t}$, on a $t = 1 \iff u = 1$ et $t = x \iff u = \dfrac{1}{x}$.

On a alors

$$\int_x^1 \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt = \int_x^1 \frac{-\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)}\frac{1}{t^2}dt = \int_{1/x}^1 \frac{\ln(u)}{u^2+1}du = -\int_1^{1/x} \frac{\ln(u)}{u^2+1}du$$

On a donc montré que pour tout $x \in]0,1]$, on a :

$$\int_x^1 \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt = -\int_1^{1/x} \frac{\ln(u)}{u^2+1}du$$

En faisant tendre x vers 0^+, puisque les deux intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ convergent bien, on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$$

2. Puisque $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ convergent, d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = 0$$

10.5 On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt$.

1. Montrer que l'intégrale converge.
2. En utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, calculer I.

1. La fonction $t \mapsto \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ (mais pas forcément positive).

   L'intégrale $\int_0^1 \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt$ ne pose pas de problème, puisque c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

   Sur $[1,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$ est continue et positive, et on a :

$$\frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^2\times t^2} = \frac{1}{t^2}$$

   Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (Intégrale de Riemann), donc par théorème d'équivalence pour les fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt$ converge.

   Par somme, puisque $\int_0^1 \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt$ convergent, on en déduit que l'intégrale I converge.

2. Fixons-nous $x > 0$. Calculons $\displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt$.

   On pose $\forall t \in \left[\frac{1}{x}, x\right], \varphi(t) = \frac{1}{t} = u$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{1}{x}, x\right]$ et $\forall t \in \left[\frac{1}{x}, x\right], \varphi'(t) = \frac{-1}{t^2}$.

   De plus, si $u = \frac{1}{t}$, on a $t = \frac{1}{x} \iff u = x$ et $t = x \iff u = \frac{1}{x}$.

   On a alors :

$$\int_{1/x}^{x} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt = \int_{1/x}^{x} \frac{1-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^4}+1}}\frac{dt}{t^2} = \int_{x}^{1/x} \frac{1-u^2}{(1+u^2)\sqrt{u^4+1}}(-du) = -\int_{1/x}^{x} \frac{u^2-1}{(1+u^2)\sqrt{1+u^4}}du$$

   En faisant tendre $x \to +\infty$ dans les deux intégrales, puisque les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt$ convergent, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt$$

   On conclut donc que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt = 0$$

10.6 Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quel est le sens de variations de f ?
3. On admet que f est une fonction continue sur son ensemble de définition.
   Déterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
   En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f revient à trouver les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt$ est convergente.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{-x}}{1+t}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc il s'agit de regarder le problème en $+\infty$.

$$t^{-x}1+x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{-x}}{t} = \frac{1}{t^{x+1}}$$

   On voit donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}dt$ qui, elle, converge si et seulement si $x+1 > 1$, c'est-à-dire $x > 0$.

   Ainsi, f est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Soient x, y deux réels strictement positifs et soit $t \geqslant 1$ (donc tel que $\ln(t) \geqslant 0$).

$$\begin{aligned}
x \leqslant y &\Longrightarrow -x \geqslant -y \\
&\Longrightarrow \forall t \geqslant 1,\ -x\ln(t) \geqslant -y\ln(t) \\
&\Longrightarrow \forall t \geqslant 1,\ e^{-x\ln(t)} \geqslant e^{-y\ln(t)} \\
&\Longrightarrow \forall t \geqslant 1,\ t^{-x} \geqslant t^{-y} \\
&\Longrightarrow \forall t \geqslant 1,\ \frac{t^{-x}}{1+t} \geqslant \frac{t^{-y}}{1+t} \qquad \Longrightarrow \forall A > 1,\ \int_1^A \frac{t^{-x}}{1+t} \geqslant \int_1^A \frac{t^{-y}}{1+t}dt \\
&\Longrightarrow (A \to +\infty)\ f(x) \geqslant f(y)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que la fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

3. Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
f(x) + f(x+1) &= \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x-1}}{1+t}dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x} + t^{-x-1}}{1+t}dt \text{ (somme de deux intégrales convergentes)} \\
&= \int_1^{+\infty} t^{-x-1}\frac{t+1}{1+t}dt \\
&= \left[-\frac{1}{x}t^{-x} \right]_1^{+\infty} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\forall x > 0,\ f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$$

- Limite de f en $+\infty$.
  On sait que f est une fonction décroissante, et minorée par 0, donc elle admet en $+\infty$ une limite finie ℓ qui vérifie $\ell \geqslant 0$.
  En passant à la limite lorsque $x \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\ell + \ell = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

- Limite de f en 0^+.
  On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} f(x+1) = f(1) &= \int_1^{+\infty} \frac{t^{-1}}{1+t}dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}dt \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt \\
&= \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt \\
&= \lim_{A \to +\infty} \Big[\ln(t) - \ln(t+1) \Big]_1^A \\
&= \lim_{A \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{A}{A+1} \right) + \ln(2) \right) \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$

Or, d'après l'éaglité trouvée au début de la question, on sait que

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+f(x+1)) = +\infty$$

donc puisque $\lim_{x\to 0} f(x+1) = \ln(2)$, on a nécessairement

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

10.7

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$ converge. On note ℓ sa valeur.
2. Soit x un réel strictement positif. Montrer que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = -\ln(x) + \ell + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt$$

(après avoir justifié l'existence des intégrales).
En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt + \ln(x)\right)$.

1. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$.
La fonction $f : t\mapsto e^{-t}\ln(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$, on a donc a priori deux problèmes : en 0 et 1.

Etude de $\int_0^1 e^{-t}\ln(t)dt$.
La fonction $f : t\mapsto e^{-t}\ln(t)$ est continue et négative sur $]0,1]$ et

$$e^{-t}\ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)$ converge, donc par équivalence des fonctions négatives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\ln(t)dt$ converge.

Etude de $\int_1^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$.
La fonction $f : t\mapsto e^{-t}\ln(t)$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ et

$$\forall t\geqslant 1,\ f(t) = e^{-t}\ln(t) \leqslant e^{-t}t = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge (Intégrale de Riemann), donc par critère de négligeabilité des fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} te^{-t}dt$ converge et enfin par comparaison des fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\ln(t)$ converge.

Par somme de deux intégrales convergentes, on en déduit donc que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt \text{ converge}$$

2. Convergence de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1+\infty[$, et $\forall t \in [1,+\infty[$, $\frac{e^{-t}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (Intégrale de Riemann), donc par critère de négligeabilité des fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge. Puisque $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt$ existe (fonction continue sur le segment $[1,x]$ ou $[x,1]$), on en déduit que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \text{ converge}$$

Convergence de $\displaystyle\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,x]$, et

$$\frac{1-e^{-t}}{t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{t}{t} = 1$$

La fonction est donc prolongeable par continuité sur le segment $[0,x]$ et donc l'intégrale est faussement impropre et converge donc.

Montrons l'égalité voulue.

Soient ε et A deux réels strictement positifs. En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_\varepsilon^A e^{-t}\ln(t)dt = \Big[-e^{-t}\ln(t)\Big]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{(-e^{-t})}{t}dt = -e^{-A}\ln(A) + e^{-\varepsilon}\ln(\varepsilon) + \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{t}dt$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt = e^{-\varepsilon}\ln(\varepsilon) + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$$

(toutes les intégrales convergent bien d'après ce qui précède, et $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{\ln(A)}{e^A} = 0$ par croissances comparées). Soit alors x un réel strictement positif. On a :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt &= e^{-\varepsilon}\ln(\varepsilon) + \int_\varepsilon^x \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \\
&= e^{-\varepsilon}\ln(\varepsilon) + \int_\varepsilon^x \frac{1}{t}dt + \int_\varepsilon^x \frac{e^{-t}-1}{t}dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \\
&= e^{-\varepsilon}\ln(\varepsilon) + \ln(x) - \ln(\varepsilon) + \int_\varepsilon^x \frac{e^{-t}-1}{t}dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \\
&= (e^{-\varepsilon}-1)\ln(\varepsilon) + \ln(x) + \int_\varepsilon^x \frac{e^{-t}-1}{t}dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt$ convergent et $(e^{-\varepsilon}-1)\ln(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} -\varepsilon\ln(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, en faisant tendre ε vers 0 dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\ell = \ln(x) + \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$$

ou autrement dit

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\ln(x) + \ell + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt$$

La fonction $h : t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$, notée H. Alors

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln(x) = \ell + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \ell + H(x) - H(0)$$

Puisque H est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier, elle est continue en 0. Donc

$$\lim_{x \to 0} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln(x) \right) = \ell + H(0) - H(0) = \ell$$