09.1 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x^2-1)}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+2x-1}+x+1$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x-2}\right)^{\sqrt{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x}-\sqrt{x}e^{1/x}\right)$

09.2 Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x>0, x\neq 1 \\ 0 & \text{si } x=1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

09.3 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $f(t) = t$.

09.4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2e^{-x}+1}$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à expliciter.

09.5 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

09.6 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2)-2x & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Etudier la dérivabilité de f en 0. Interprétation graphique ?

09.7 Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

1. Montrer que f est bijective. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Préciser le domaine de définition de f^{-1}.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse $1/3$.
4. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} ?
5. La courbe représentative de f^{-1} admet-elle une tangente au point d'abscisse 1 ?
6. Dresser les tableaux de variation de f et f^{-1}. T
7. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de f et f^{-1}.

09.8 En appliquant le Théorème des Accroissements Finis à la fonction $h : x \mapsto \ln(\mathrm{Arctan}(x))$, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{Arctan}(n+1)}{\mathrm{Arctan}(n)}\right)^{n^2}$$

09.9

1. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'équation $e^x + x = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n.
2. Déterminer la monotonie de la suite (x_n).
3. Démontrer que $\forall n \geqslant 1,\ \ln(n-\ln(n)) \leqslant x_n \leqslant \ln(n)$
4. En déduire la limite de la suite (x_n), puis un équivalent simple de x_n.

$\boxed{\textbf{09.10}}$ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré n ayant n racines distinctes réelles.

1. Montrer que P' admet exactement $n-1$ racines distinctes réelles.
2. Montrer que toutes les racines de P^2+1 sont complexes et toutes simples.

$\boxed{\textbf{09.11}}$ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

On suppose que $f(a) = f'(a) = 0$, que $f(b) > 0$ et que $f'(b) < 0$.
Montrer que f' s'annule sur $]a, b[$.

$\boxed{\textbf{09.12}}$ Calculer les intégrales suivantes, un changement de variable est éventuellement indiqué entre parenthèses.

1. $\displaystyle\int_0^2 t\cos(t)dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt$
3. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}dt$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}dt$
5. $\displaystyle\int_{-1}^0 e^{3t+1}dt$
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 t^{2011}(t^2+1)^{2009}dt$
7. $\displaystyle\int -\pi/5^{\pi/5}\frac{\sin(\sin(\tan(t)))}{\ln(1+t^2)}dt$
8. $\displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8}dt \ (u = t^3+8)$
9. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{t(t+1)}dt \ (u = \frac{t}{t+1})$
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(t^3+1)} \ (u = t^3)$
11. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt \ (u = \sqrt{t})$
12. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(t^3+1)} \ (u = t^3)$
13. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt \ (u = \sqrt{t})$
14. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^t-1}dt$
15. $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t+t\ln^2(t)}$

$\boxed{\textbf{09.13}}$ On pose pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$.

1. Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on a $I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}$.
   En déduire une formule explicite pour $I_{p,q}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

$\boxed{\textbf{09.14}}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.

1. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f.
2. On pose $\forall x > 0, g(x) = f(x) - \ln(x)$. Etudier les variations de g et en déduire son signe.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$\boxed{\textbf{09.15}}$ Soit G la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-(xt)^2}dt$.

Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$ et soit F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$.

1. Etudier les variations de F. On admet que F est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer pour $x \neq 0$ une relation entre $G(x)$ et $F(x)$.
3. Démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que sa dérivée est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G'(x) = \frac{xe^{-x^2} - F(x)}{x^2}.$$
   En déduire les variations de G.
4. Montrer que G est continue en 0 et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.
5. Montrer que pour $u > 0$, on a $|e^{-u} - 1| \leqslant u$.
   En déduire que G est dérivable en 0 et que $G'(0) = 0$.
6. Vérifier que G' est continue sur $\mathbb{R}$.