$\boxed{\textbf{06.1}}$ On lance 2 pièces. On désigne par P le côté Pile et par F le côté Face. Ecrire l'univers Ω_1 lorsque l'on considère les pièces discernables puis l'univers Ω_2 lorsque l'on considère les pièces non discernables.

Si les pièces sont discernables, on a un ordre implicite entre les deux pièces. Un résultat sera alors un couple (x, y) où x désigne le résultat de la 1ère pièce et y désigne le résultat de la 2-ième pièce. On a donc $\Omega_1 = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$.

Si les pièces sont non discernables, un résultat sera alors un ensemble de résultats : $\{x, y\}$ où x et y désignent les deux résultats qui apparaissent sur les 2 pièces (sans ordre). On a donc $\Omega_2 = \{\{P, P\}, \{P, F\}, \{F, F\}\}$.

$\boxed{\textbf{06.2}}$ Soit le lancement d'un dé cubique non truqué. Déterminer la tribu engendrée par $\{1\}$ et $\{2\}$ la plus petite possible, et qui soit stable par complémentarité, réunion, intersection et différence.
Mêmes questions avec la tribu engendrée par $\{1, 2\}$ et $\{3, 4, 5\}$.

On lance le dé. On a donc $\Omega = [\![1, 6]\!]$.
Notons $\mathcal{A}_1$ la tribu engendrée par $\{1\}$ et $\{2\}$. Cela doit être le plus petit ensemble de parties de Ω qui doit :
- contenir Ω
- contenir $\{1\}$ et $\{2\}$
- contenir tous les complémentaires des parties qui sont dans la tribu
- contenir toutes les réunions possibles des éléments de la tribu

On en déduit que
$$\mathcal{A}_1 = \{\Omega, \{1\}, \{2\}, \emptyset, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$$

Notons $\mathcal{A}_2$ la tribu engendrée par $\{1, 2\}$ et $\{3, 4, 5\}$. Cela doit être le plus petit ensemble de parties de Ω qui doit :
- contenir Ω
- contenir $\{1, 2\}$ et $\{3, 4, 5\}$
- contenir tous les complémentaires des parties qui sont dans la tribu
- contenir toutes les réunions possibles des éléments de la tribu

On en déduit que
$$\mathcal{A}_2 = \{\Omega, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \emptyset, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6\}\}$$

$\boxed{\textbf{06.3}}$ On lance un dé cubique à plusieurs reprises. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $S_i =$ "le i-ième lancer donne un 6".

1. Ecrire à l'aide des événements S_i et $\overline{S_i}$ l'événement $A =$ "la première apparition du 6 a lieu après le cinquième lancer".
2. Est-ce le même événement que $B =$ "le 6 n'apparaît pas au cours des 5 premiers lancers" ?
3. Est-ce le même événement que $D = \bigcup_{i \geqslant 6} S_i$?
4. On effectue une suite infinie de lancers d'un dé. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $A_i =$ "le i-ième lancer donne un 1".
   Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements suivants :
   $E_1 = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i, \quad E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{4} \overline{A_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i\right), \quad E_3 = \bigcup_{i>4} A_i.$
5. Ecrire à l'aide des événements A_i l'événement "on obtient au moins une fois le 1 après le n-ième lancer".

1. Pour décrire l'événement A : "la première apparition du 6 a lieu après le cinquième lancer", il faut que :
   - au lancer 1, on n'ait pas eu de 6
   - au lancer 2, on n'ait pas eu de 6
   - $\vdots$
   - au lancer 5, on n'ait pas eu de 6
   - dans au moins un des lancers 6 ou plus, le 6 apparaît au moins une fois

   Ainsi
   $$A = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4} \cap \overline{S_5} \cap (S_6 \cup S_7 \cup S_8 \cup \cdots) = \bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_i} \cap \bigcup_{i \geqslant 6} S_i$$
2. $A \neq B$. En effet, dans B on ne sait pas si le 6 va apparaître après les 5 lancers, chose qui était réalisée dans l'événement A. On a
   $$B = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4} \cap \overline{S_5}$$
3. $A \neq D$. En effet, dans D, on sait qu'il y a au moins un 6 après le cinquième lancer, mais on n'impose pas que ce soit la première apparition. On a :
   $$A = B \cap D$$
4. $E_1 = \displaystyle\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i$: cela veut dire que tous les A_i sont réalisés pour $i \geqslant 5$. Autrement dit E_1 est l'événement "tous les lancers à partir du 5ème (compris) donnent un 1".
   $E_2 = \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{4} \overline{A_i}\right) \cap \left(\displaystyle\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i\right)$: cela veut dire que les A_i ne sont pas réalisés pour $i \in [\![1, 4]\!]$ et que tous les A_i sont réalisés pour $i \geqslant 5$. Autrement dit E_2 est l'événement "les 4 premiers lancers ne donnent pas de 1, mais tous les lancers à partir du 5ème (compris) donnent un 1".
   $E_3 = \displaystyle\bigcup_{i>4} A_i$: cela veut dire qu'au moins un des A_i est réalisé pour $i > 4$. Autrement dit E_3 est l'événement "le 1 apparaît après le 4ème lancer (non compris)".
5. Soit B l'événement "on obtient au moins une fois le 1 après le n-ième lancer". Alors
   $$B = \bigcup_{i \geqslant n+1} A_i$$

06.4 On considère $\Omega = [\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = \alpha k$, où α est un réel fixé. Déterminer α en fonction de n pour qu'à partir de la famille $(p_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, on puisse définir une loi de probabilité.

Pour vérifier que la famille $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ peut définir une loi de probabilité sur Ω, il faut vérifier que :
- $\forall k \in [\![1, n]\!],\ p_k \geqslant 0$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

Pour que les p_k soient tous positifs, on doit imposer que $\alpha \geqslant 0$.
De plus,
$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha k = \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = \alpha \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour que la somme des p_k soit égale à 1, on doit donc imposer que $\alpha = \dfrac{2}{n(n+1)}$: c'est l'unique possibilité.

Vérification : si $\boxed{\alpha = \dfrac{2}{n(n+1)}}$, alors on a bien $\forall k \in [\![1, n]\!],\ p_k = \frac{2k}{n(n+1)} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, donc dans ce cas (et uniquement dans ce cas), la famille $(p_1, \ldots, p_6)$ définit une loi de probabilité sur Ω.

06.5 Soit a un réel non nul. On considère $\Omega = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \frac{1}{8}\left(\frac{2+a^k}{k!}\right)$. Déterminer la valeur de a pour que la famille $(p_k)_{k\geqslant 0}$ définisse une loi de probabilité sur Ω.

Pour vérifier que la famille $(p_k)_{k\geqslant 0}$ peut définir une loi de probabilité sur $\Omega = \mathbb{N}$, il faut vérifier que :

– $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k \geqslant 0$

– la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k$ converge

– $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$

Pour que les p_k soient tous positifs, on doit imposer que $2 + a^k \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On souhaite que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k$ converge. Or,

$$\frac{1}{8}\left(\frac{2+a^k}{k!}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{k!} + \frac{1}{8}\times\frac{a^k}{k!}$$

Puisque les deux séries $\sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{a^k}{k!}$ convergent (séries exponentielles), la série de terme général $p_k = \frac{1}{8}\left(\frac{2+a^k}{k!}\right)$ converge bien, ceci pour n'importe quelle valeur de a.

De plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} + \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!} = \frac{1}{4}e + \frac{1}{8}e^a$$

Pour que la somme des p_k soit égale à 1, il faut donc que

$$\frac{1}{4}e + \frac{1}{8}e^a = 1 \iff e^a = 8 - 2e \iff a = \ln(8-2e)$$

On doit donc imposer que $a = \ln(8-2e)$: c'est l'unique possibilité.

Vérification : Si $\boxed{a = \ln(8-2e)}$, puisque $e \simeq 2,7$, on a $8 - 2e > 1$, donc $a > 0$, donc on a bien $p_k \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a vu que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}$ convergeait bien, et pour cette valeur de a, la somme vaut $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$. Ainsi dans ce cas (et uniquement dans ce cas), la famille $(p_k)_{k\geqslant 0}$ définit une loi de probabilité sur Ω.

06.6 Au loto, une grille est composée de 49 numéros. On réalise alors un tirage simultané de 5 numéros.

1. Calculer la probabilité d'avoir la grille avec les 5 bons numéros.
2. Calculer la probabilité d'avoir la grille avec au moins deux bons numéros.

Notre expérience est la suivante : on choisit une grille au hasard. L'univers Ω désigne l'ensemble des grilles possibles : il y a $\binom{49}{5}$ grilles possibles, et on est en situation d'équiprobabilité puisque toutes les grilles ont la même probabilité d'être choisies.

1. Soit A l'événement : "la grille contient les 5 bons numéros". On a $Card(A) = 1$. Donc par équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{\binom{49}{5}}$$

2. Soit B l'événement : "la grille contient au moins deux bons numéros". L'événement contraire est $\overline{B}$: "la grille contient au plus un bon numéro". On peut écrire $\overline{B} = C \cup D$ où C : "la grille ne contient aucun bon numéro" et D : "la grille contient exactement un bon numéro". Puisque C et D sont disjoints, on a :

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(C \cup D) = 1 - (\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D))$$

Pour choisir une grille avec aucun bon numéro, on doit choisir 5 nombre parmi les 44 mauvais numéros : on a donc $Card(C) = \binom{44}{5}$. Ainsi, par équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{\binom{44}{5}}{\binom{49}{5}}$$

Pour choisir une grilel avec exactement un bon numéro, on doit choisir 1 numéro parmi les 5 bons numéros, puis 4 numéros parmi les 44 mauvais : on a donc $Card(D) = \binom{5}{1}\binom{44}{4}$. Ainsi, par équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \frac{5\binom{44}{4}}{\binom{49}{5}}$$

Finalement, on a :

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{\binom{44}{5}}{\binom{49}{5}} - \frac{5\binom{44}{4}}{\binom{49}{5}}$$

06.7 On compose au hasard un numéro de téléphone de 8 chiffres, les chiffre étant compris entre 0 et 9 et pouvant être répétés. Quelle est la probabilité pour que les chiffres forment une suite strictement croissante ?

On considère l'expérience suivante : on choisit un numéro de téléphone de 8 chiffres. L'univers Ω est donc $[\![0,9]\!]^8$ (ce sont des 8-listes de l'ensemble $[\![0,9]\!]$). En particulier, $Card(\Omega) = 10^8$. A priori, tous les numéros ont la même probabilité d'être tirés, on est donc en situation d'équiprobabilité.

Soit A l'événement "les chiffres du numéro forment une suite strictement croissante".
Pour choisir une réalisation de A :
- on commence d'abord par choisir les 8 chiffres du numéro : on doit donc choisir 8 chiffres distincts, il y a $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$ possibilités.
- puis, une fois les numéros choisis, il n'y a qu'une seule manière de les ordonner selon une suite strictement croissante : c'est de mettre le plus petit en premier, puis le second, ..., jusqu'au plus grand : il n'y a donc plus de choix possibles.

Ainsi, $Card(A) = 45$, et donc par équiprobabilité, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{45}{10^8}$.

06.8 On jette simultanément deux dés à 6 faces équilibrés. Trouver la probabilité que :

1. un des deux dés ait fourni le nombre 3 sachant que la somme des 2 dés a donné 6.
2. la somme des deux dés fournisse un nombre supérieur ou égal à 7 sachant que les 2 numéros sont de même parité.

On considère l'expérience suivante : on jette les deux dés simultanément. Si on considère l'univers $\Omega = \{\{x,y\},\ x,y \in [\![1,6]\!]\}$, on n'aura pas d'équiprobabilité. En effet, il y aura moins de chance d'obtenir par exemple le double 4 que le lancers $\{2,5\}$ (qui peut a priori apparaître deux fois plus !).

Transformons un peu notre expérience. On considère que les deux dés sont distinguables. On considère alors l'univers $\Omega' = [\![1,6]\!]^2$ sur lequel on a cette fois équiprobabilité. On va donc travailler sur cet univers qui semble plus pratique. Remarquons qu'on a $Card(\Omega') = 36$.

1. Soit A l'événement : "un des deux dés a fourni le nombre 3".
   Soit B l'événement : "la somme des deux dés a donné 6".
   On cherche donc $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Puisqu'on est en situation d'équiprobabilité dans Ω', on peut écrire :
   $$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega')}}{\frac{Card(B)}{Card(\Omega')}} = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$$
   On a $B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$, donc $Card(B) = 5$.
   De plus, $A \cap B = \{(3,3)\}$, donc $Card(A \cap B) = 1$.
   On en déduit que
   $$\mathbb{P}_B(A) = \frac{1}{5}$$
2. Soit C l'événement : "la somme des deux dés fournit un nombre supérieur ou égal à 7"
   Soit D l'événement : "les deux numéros sont de même parité"
   On cherche donc $\mathbb{P}_D(C) = \dfrac{\mathbb{P}(C \cap D)}{\mathbb{P}(D)}$. Puisqu'on est en situation d'équiprobabilité dans Ω', on peut écrire :
   $$\mathbb{P}_D(C) = \frac{\mathbb{P}(C \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\frac{Card(C \cap D)}{Card(\Omega')}}{\frac{Card(D)}{Card(\Omega')}} = \frac{Card(C \cap D)}{Card(D)}$$
   On a $D = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),(2,2)(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),$
   On a donc $Card(D) = 18$.
   De plus, $C \cap D = \{(3,5),(5,3),(5,5),(2,6),(4,4),(4,6),(6,2)(,6,4),(6,6)\}$. On a donc $Card(C \cap D) = 9$.
   On en déduit que
   $$\mathbb{P}_D(C) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

06.9 Une galette des rois est découpée en 12 parts égales. Elle ne contient qu'une seule fève. On a 12 convivent qui choisissent au hasard leur part, les uns après les autres, du plus jeune au plus âgé. Vaut-il mieux être plus jeune ou plus vieux pour avoir le maximum de chances d'avoir la fève ?

Notons pour tout $i \in [\![1, 12]\!]$, l'événement A_i : "le i-ième convive obtient la fève" (où on a ordonné les convives du plus jeune au plus âgé. La question est donc de comparer les probabilités des événements $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$.

On connaît au moins $\mathbb{P}(A_1)$ car le plus jeune tire une part au hasard parmi les 12 parts possibles dont une seule contient la fève : par équiprobabilité on a donc

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{12}$$

Pour que le 2ème convive ait la fève, il faut que le convive 1 ne l'ait pas eu. En fait, on a donc $\overline{A_1} \subset A_2$, donc

$$A_2 = A_2 \cap \overline{A_1}$$

Par la Formule des Probabilités Composées :

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap A_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{11}{12} \times \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2)$$

Or, $\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2)$ est la probabilité que le deuxième convive ait la fève sachant que le premier n'a pas pris la fève. Le convive 2 choisit donc une part parmi 11 possibles, dont une contient la fève. Donc par équiprobabilité, $\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2) = \dfrac{1}{11}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{11}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{12}$$

Pour le troisième convive, on utilise le fait qu'il faut que les convives 1 et 2 n'aient pas eu la fève pour qu'il espère l'avoir. Cela se traduit donc par $A_3 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$. Donc, par la Formule des Probabilités Composées :

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2)\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(A_3)$$

Or, $\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2)$ est la probabilité que le 2-ième convive n'ait pas la fève sachant que le premier a pris une part sans fève : de façon similaire à ce qu'on a fait précédemment, c'est $\dfrac{10}{11}$.
Egalement, $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(A_3)$ est la probabilité que le 3-ième convive ait la fève sachant que le 1er et le 2ème ont pris des parts sans fève : le convive 3 choisit donc une part parmi 10, dont une contient la fève. Par équiprobabilité, c'est donc $\dfrac{1}{10}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{11}{12} \times \frac{10}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{12}$$

Généralisons ce raisonnement. Considérons le k-ième convive, il a une chance d'avoir la fève si et seulement si tous les précédents ne l'ont pas eue, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\
&= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2)\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(\overline{A_3}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) \\
&= \frac{11}{12} \times \frac{10}{11} \times \frac{9}{10} \times \cdots \times \frac{12-k+1}{12-k+2} \times \frac{1}{12-k+1} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Finalement, tous les convives ont donc la même chance d'avoir la fève. Pas de jaloux !

06.10 Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate que :
– il y a parmi les malades, 1 vacciné pour 4 non-vaccinés
– il y a 1 malade sur 12 parmi les vaccinés.
Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?
Le vaccin est-il efficace ? Autrement-dit, comparer les probabilités de tomber malade pour un non-vacciné et pour un vacciné.

On considère l'expérience suivante : on choisit une personne au hasard parmi la population (donc situation d'équiprobabilité). On note les événements suivants :
- M : "la personne est malade"
- $\overline{M}$: "la personne n'est pas malade"
- V : "la personne est vaccinée"
- $\overline{V}$: "la personne n'est pas vaccinée"

L'énoncé nous donne les informations suivantes :

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(\overline{V}) = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}_M(V) = \frac{1}{5}, \qquad \mathbb{P}_M(\overline{V}) = \frac{4}{5}$$

$$\mathbb{P}_V(M) = \frac{1}{12}, \qquad \mathbb{P}_V(\overline{M}) = \frac{11}{12}$$

On cherche la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade, autrement dit on cherche : $\mathbb{P}_{\overline{V}}(M)$.

$$\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap \overline{V})}{\mathbb{P}(\overline{V})} = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(\overline{V})}{\mathbb{P}(\overline{V})}$$

(d'après la formule des probabilités composées). On a donc

$$\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \mathbb{P}(M)\frac{16}{15}$$

Il nous faut donc chercher $\mathbb{P}(M)$. Puisque $(V, \overline{V})$ est un système complet d'événements, on peut appliquer la Formule des Probabilités Totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}(M \cap V) + \mathbb{P}(M \cap \overline{V})\\ &= \mathbb{P}(V)\mathbb{P}_V(M) + \mathbb{P}(\overline{V})\mathbb{P}_{\overline{V}}(M)\\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{3}{4}\mathbb{P}_{\overline{V}}(M)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{3}{4}\mathbb{P}_{\overline{V}}(M)\right) = \frac{1}{45} + \frac{4}{5}\mathbb{P}_{\overline{V}}(M)$$

autrement dit

$$\boxed{\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{1}{9}}$$

La probabilité de tomber malade quand on est vacciné est $\frac{1}{12}$, qui est donc plus petite que la probabilité de tomber malade quand on n'est pas vacciné. Le vaccin est donc efficace !

06.11 Trois usines produisent des moteurs identiques qui sont stockés dans un même entrepot dont la répartition est donnée :
– 50% des moteurs proviennent de l'usine A, 30% de l'usine B et 20% de l'usine C.
– 5% des moteurs produits dans l'usine A sont défectueux, 8% pour l'usine B et 4% pour l'usine C;
Calculer la probabilité pour qu'un moteur défectueux provienne de l'usine A.

On considère l'espérience suivante : on choisit au hasard un moteur (et donc avec équiprobabilité).
Soit A l'événement "le moteur provient de l'usine A".
Soit B l'événement "le moteur provient de l'usine B".
Soit C l'événement "le moteur provient de l'usine C".
Soit D l'évenement "le moteur est défecteux".
Soit $\overline{D}$: l'événement "le moteur n'est pas défectueux".

Regardons un peu les données données par l'énoncé. On sait que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}_A(D) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \quad \mathbb{P}_B(D) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}, \quad \mathbb{P}_C(D) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

On cherche $\mathbb{P}_D(A)$. Puisque (A, B, C) forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_D(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(D)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(D) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(D) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}_C(D)}$$

Ainsi, on a directement que

$$\mathbb{P}_D(A) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{20}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{20} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{25} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{25}} = \frac{1}{1 + \frac{160}{125}} = \frac{125}{285} = \frac{25}{57}$$

06.12 Une personne écrit des lettres personnelles à n correspondants, mais la secrétaire, croyant qu'il s'agit d'une circulaire, met les étiquettes d'adresses au hasard.

1. Quelle est la probabilité que chaque lettre parvienne à son destinataire ? On pourra désigner par C_k l'événement : "la lettre numéro k arrive bien à son destinataire".
2. Les événements C_1 et C_2 sont-ils indépendants ?
3. Calculer $\mathbb{P}(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots \cap C_{i_k})$ pour $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$.
4. Quelle est la probabilité qu'une lettre au moins parvienne à son destinataire ?
5. On suppose désormais que le nombre de lettres est infini. Que peut-on dire de l'événement : "au moins une lettre arrive bien à son destinataire ?

On considère l'expérience suivante : la secrétaire choisit (au hasard) les étiquettes au hasard sur les n lettres. Il y a donc équiprobabilité entre les différentes situations d'envois possibles. Remarquons que le nombre de situations correspond donc au nombre de permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. En effet, pour avoir une situation, on choisit le destinataire de la 1ère lettre (n possibilités), puis on choisit le destinataire de la 2ème lettre ($n-1$ possibilités), ..., enfin on choisit le destintaire de la n-ième lettre (1 possibilité). On a donc

$$Card(\Omega) = n!$$

1. Soit A l'événement "chaque lettre parvient à son destinataire". Autrement dit $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} C_k$. On a une unique situation correspondant à l'événement A. Donc par équiprobabilité :
$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{n!}$$
2. C_1 : "la lettre numéro 1 arrive bien à son destinataire". Pour avoir une situation de C_1 :
   - on envoie la lettre numéro 1 au bon destinataire : il y a 1 possibilité.
   - puis on envoie les $n-1$ autres lettres comme on veut aux $n-1$ autres destinataires : il y a $(n-1)!$ possibilités

   Ainsi $Card(C_1) = (n-1)!$ et donc par équiprobabilité $\mathbb{P}(C_1) = \frac{Card(C_1)}{Card(\Omega)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

   C_2 : "la lettre numéro 2 arrive bien à son destinataire". Quitte à renuméroter les lettres, on a exactement le même raisonnement que celui pour la 1ère lettre, donc $\mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{n}$.

   $C_1 \cap C_1$: "les lettres numéro 1 et 2 arrivent bien à leur destintaire". Pour avoir une situation de $C_1 \cap C_2$:
   - on envoie la lettre numéro 1 au bon destinataire : il y a 1 possibilité.
   - on envoie la lettre numéro 2 au bon destinataire : il y a 1 possibilité.
   - puis on envoie les $n-2$ autres lettres comme on veut aux $n-2$ autres destinataires : il y a $(n-2)!$ possibilités

   Ainsi $Card(C_1) = (n-2)!$ et donc par équiprobabilité $\mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \frac{Card(C_1 \cap C_2)}{Card(\Omega)} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$

   Ainsi
$$\mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}(C_2) = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{n(n-1)} = \mathbb{P}(C_1 \cap C_2)$$
   Donc les événements C_1 et C_2 ne sont pas indépendants.
3. Fixons-nous $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$. Notons $B = C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots \cap C_{i_k}$
   Pour avoir une situation de B, :
   - on envoie les letrres $i_1, i_2, \ldots, i_k$ à leur "bon" destinataire respectif : 1 possibilité.

– puis on envoie les $n-k$ autres lettres comme on veut aux $n-k$ autres destinataires : il y a $(n-k)!$ possibilités

Ainsi, $Card(B) = (n-k)!$ et donc par équiprobabilité $\mathbb{P}(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{(n-k)!}{n!}$.

4. Soit E l'événement "au moins une lettre parvient à son destinataire" : on a donc $E_n = C_1 \cup \cdots \cup C_n$. On applique la formule du Crible :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(C_1 \cup \cdots \cup C_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots \cap C_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \frac{(n-k)!}{n!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

5. On suppose désormais que le nombre de lettres est infini. Que peut-on dire de l'événement : "au moins une lettre arrive bien à son destinataire ?

Notons à présent F l'événement "au moins une lettre arrive bien à son destinataire". Alors on a $F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ où E_n l'événement "au moins une lettre parvient à son destinataire parmi les n premières lettres envoyées". La suite (F_n) est une suite croissante d'événements, donc d'après le Théorème de la Limite Monotone,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(E_n) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= -\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} - 1\right) \\
&= -\left(e^{-1} - 1\right) \\
&= 1 - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

06.13 Alice et Bruno lancent le même dé à tour de rôle et Alice commence. Les lancers sont indépendants. Le gagnant est le premier à obetnir un "6". Quand Alice ou Bruno gagne, la partie s'arrête.
On s'intéresse aux trois événements suivants :
- A : "victoire d'Alice"
- B : "victoire de Bruno"
- D : "pas de vainqueur"

On note F_n : "fin de la partie au n-ième lancer" et S_j : "le j-ième lancer donne un 6".

1. En exprimant l'événement D à l'aide des événements S_j, déterminer la probabilité qu'il n'y ait pas de vainqueur.
2. Exprimer l'événement F_n à l'aide des événements S_j et en déduire la probabilité de F_n.
3. Exprimer les événements A et B à l'aide des événements F_n.
4. Calculer la probabilité de victoire de chaque joueur.

1. L'événement D :"il n'y a pas de vainqueur" correspond au fait que le 6 n'apparaîsse jamais. On a donc
$$D = \bigcap_{j \geqslant 1} \overline{S_j}$$
Posons l'événement D_n : "il n'y a pas de vainqueur durant les n premiers lancers". La suite (D_n) est une suite décroissante d'événements(pour l'inclusion) et $D = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} D_n$. Donc d'après le Théorème de la Limite Monotone,
$$\mathbb{P}(D) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(D_n)$$
$D_n = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_n}$. Puisque les lancers de dé sont indépendants mutuellement, on a
$$\mathbb{P}(D_n) = \mathbb{P}(\overline{S_1})\mathbb{P}(\overline{S_2}) \cdots \mathbb{P}(\overline{S_n}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$
Ainsi
$$\mathbb{P}(D) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$
Ainsi, D est un événement négligeable. Presque sûrement, il y aura un vainqueur.
2. On a : $F_n = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n$.
Puisque les différents lancers du dé sont indépendants mutuellement, on a :
$$\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(\overline{S_1})\mathbb{P}(\overline{S_2}) \cdots \mathbb{P}(\overline{S_{n-1}})\mathbb{P}(S_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$
3.
$$A = \bigcup_{\substack{n \geqslant 1 \\ n \text{ impair}}} F_n = \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_{2k+1}$$
et
$$B = \bigcup_{\substack{n \geqslant 1 \\ n \text{ pair}}} F_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_{2k}$$

4. Les événements $(F_n)_{n\geqslant 1}$ étant deux à deux incompatibles, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_{2k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{1}{6}\frac{36}{11} = \frac{6}{11}\end{aligned}$$

Comme on a $\Omega = A\cup B\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$ et qu'on a dit que $\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0$ (il y a presque sûrement un vainqueur), on en déduit que

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{5}{11}$$

On peut vérifier également par le calcul :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(F_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1} \\ &= \frac{1}{6}\frac{6}{5}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{25}{36}} - 1\right) = \frac{1}{5}\frac{36}{11} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\frac{25}{11} = \frac{5}{11}\end{aligned}$$

Au final, Alice a une propriété de $\frac{6}{11}$ de gagner et Bruno une probabilité de $\frac{5}{11}$ de gagner.

$\boxed{\textbf{06.14}}$ Une urne contient au départ une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages dans cette urne de la façon suivante : si l'on tire une boule blanche, on la remet avec une boule blanche supplémentaire, et on arrête les tirages dès que la boule rouge est obtenue.

1. On note A_n : "le jeu s'arrête au n-ième tirage". Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête ?

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n : "le n-ième tirage donne une boule blanche" et R_n : "le n-ième tirage donne une boule rouge".
On note A_n : "le jeu s'arrête au n-ième tirage". Alors

$$A_n = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap R_n$$

On a d'après la Formule des Probabilités Composées :

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}\cap R_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_2)\cdots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots B_{n-2}}(B_{n-1})\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots B_{n-1}}(R_n)$$

On a facilement $\mathbb{P}(B_1)$ car on avait initialement deux boules dont une boule blanche, donc par équiprobabilité $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{2}$.

$\mathbb{P}_{B_1}(B_2)$ est la probabilité d'avoir une boule blanche au 2ème tirage sachant qu'on avait tiré une boule blanche au 1er tirage. Au moment du 2ème tirage dans l'urne, il y a 3 boules dans l'urne dont 2 blanches, il y a donc par équiprobabilité $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3}$.
Plus généralement, $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k)$ est la probabilité d'avoir une boule blanche au k-ième tirage sachant qu'on avait tiré une boule blanche aux $k-1$ premiers tirages. Au moment du k-ième tirage dans l'urne, il y a $k+1$ boules dans l'urne dont k blanches, il y a donc par équiprobabilité $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{k}{k+1}$.
Enfin, $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots B_{n-1}}(R_n)$ est la probabilité d'avoir une boule rouge au n-ième tirage sachant qu'on avait tiré une boule blanche aux n premiers tirages. Au moment du n-ième tirage dans l'urne, il y a $n+1$ boules dans l'urne dont 1 rouge, il y a donc par équiprobabilité $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots B_{n-1}}(R_n) = \frac{1}{n+1}$.
Finalement,

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

2. Soit A l'événement "le jeu s'arrête". Alors on a $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.
Les événements $(A_n)_{n \geqslant 1}$ étant tous deux à deux incompatibles, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

On a pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Ainsi pour tout $N \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

Ainsi, on en déduit que $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, autrement dit $\mathbb{P}(A) = 1$. Ainsi, le jeu s'arrêtera presque sûrement.

06.15 Soient deux points A et B sur lesquels une puce saute. Lorsqu'elle est en A, la probabilité qu'elle atterisse en B à l'instant suivant est $p \in]0,1[$ et la probabilité qu'elle reste en A est $1-p$. De même pour B avec q et $1-q$. On note a_n la probabilité qu'elle soit en A à l'instant n. De même b_n est la probabilité qu'elle soit en B à l'instant n.
On suppose que la puce est en A à l'instant initial 0.

1. Déterminer une relation entre a_{n+1}, a_n et b_n.
2. Montrer que $a_n + b_n = 1$. En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.
3. Déterminer a_n puis b_n en fonction de n.

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$:
– A_n l'événement "la puce est en A à l'instant n"
– B_n l'événement "la puce est en B à l'instant n"
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le couple d'événements (A_n, B_n) forme un système complet d'événements, donc par la Formule des Probabilités Totales,

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})$$

Or d'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1-p$ et $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = q$.
En utilisant les notations $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ de l'énoncé, on a donc

$$\boxed{a_{n+1} = a_n(1-p) + b_n q}$$

Remarquons que de meme, on a :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})$$

autrement dit, on a

$$\boxed{b_{n+1} = a_n p + b_n(1-q)}$$

2. Puisque (A_n, B_n) forme un système complet d'événements, on a $\overline{A_n} = B_n$, donc $\mathbb{P}(B_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n)$, autrement dit $b_n = 1 - a_n$.
   On a donc
   $$a_{n+1} = a_n(1-p) + (1-a_n)q$$
   autrement dit
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = (1-p-q)a_n + q}$$
3. La suite (a_n) est une suite arithmético-géométrique.
   On résout l'équation caractéristique :
   $$x = (1-p-q)x + q \Longleftrightarrow (p+q)x = q \Longleftrightarrow x = \frac{q}{p+q}$$
   (puisque $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$, on a bien $p+q \neq 0$.
   Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - \frac{q}{p+q}$. La suite (u_n) est géométrique de raison $(1-p-q)$, autrement dit :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n - \frac{q}{p+q} = (1-p-q)^n \left(a_0 - \frac{q}{p+q}\right)$$
   Or, $a_0 = 1$ puisqu'à l'instant 0, on est certain que la puce est en A. Donc
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left(1 - \frac{q}{p+q}\right) = \boxed{\frac{p(1-p-q)^n + q}{p+q}}$$
   On en déduit que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 1 - a_n = 1 - \frac{p(1-p-q)^n + q}{p+q} = \boxed{\frac{p - p(1-p-q)^n}{p+q}}$$

06.16 On considère le jeu palpitant suivant : on lance trois pièces équilibrées, si les trois pièces donnent Pile le jeu s'arrête, sinon on recommence.

1. Calculer la probabilité que le jeu s'arrête au n-ième lancer. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. Calculer la probabilité qu'au n-ième lancer, le jeu ne se soit pas encore arrêté. En déduire à nouveau que le jeu s'arrête presque sûrement.

1. Notons A_n l'événement "Le jeu s'arrête au n-ième lancer". On cherche donc $\mathbb{P}(A_n)$.
   Notons T_k : "au k-ième lancer, les trois pièces ont donné Pile". On a alors
   $$A_1 = T_1 \qquad \text{et } \forall n \geqslant 1,\ A_n = \overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \cdots \cap \overline{T_{n-1}} \cap T_n$$
   Comme les T_i sont indépendants, on peut écrire :
   $$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(T_1) \quad \text{et } \forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\overline{T_1})\mathbb{P}(\overline{T_2}) \cdots \mathbb{P}(\overline{T_{n-1}})\mathbb{P}(T_n)$$

Calculons pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(T_k)$. Les résultats des jets des trois pièces étant indépendants, et la pièce étant équilibrée, on a

$$\mathbb{P}(T_k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

D'où

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{8}$$

et pour $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(A_n) = \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{n-1} \frac{1}{8} = \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \frac{1}{8}$$

Soit A l'événement "Le jeu s'arrête". On a clairement $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, et les A_n étant deux à deux incompatibles, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^{k} = \frac{1}{8} \frac{1}{1 - \frac{7}{8}} = 1$$

Donc le jeu s'arrête presque sûrement.

2. Notons B_n l'événement "Au n-ième lancer, le jeu ne s'est pas encore arrêté". On a alors

$$B_n = \overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \cdots \cap \overline{T_{n-1}} \cap \overline{T_n}$$

Comme les T_i sont indépendants, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\overline{T_1})\mathbb{P}(\overline{T_2}) \cdots \mathbb{P}(\overline{T_n}) = \left(\frac{7}{8}\right)^n$$

La suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite décroissante d'événements. En effet, pour tout $n \geqslant 1$, si on suppose que au $n+1$-ième lancer, le jeu ne s'est pas encore arrêté, cela implique nécessairement que au n-ième lancer, le jeu ne s'était pas encore arrêté. Autrement dit

$$\forall n \geqslant 1,\ B_{n+1} \subset B_n$$

D'après le théorème de la limite monotone, on sait donc que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right)$$

Or, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$ correspond à l'événement "Le jeu ne s'arrête pas", autrement dit l'événement $\overline{A}$ (en reprenant les notations de la quetsion 1). On a donc

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$$

et l'événement A : "le jeu s'arrête" est donc un événement presque sûr.