03.1 Des amis décident de joueur au poker avec un jeu de 32 cartes, réparties en quatre couleurs : $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$, constituées chacune de 8 hauteurs : 7,8,9,10,V,D,R,A. On distribue à chaque joueur une main de 5 cartes.

1. Dénombrer le nombre de mains possibles.
2. Dénombrer le nombre de mains qui contiennent un carré (i.e. 4 cartes de même hauteur).
3. Dénombrer le nombre de mains qui contiennent un full (i.e. 3 cartes de même hauteur et 2 cartes d'une autre même hauteur).
4. Dénombrer le nombre de mains qui contiennent un brelan (i.e. 3 cartes de même hauteur, sans full ni carré)
5. Dénombrer le nombre de mains qui contiennent une quinte flush (i.e. 5 cartes de hauteurs consécutives et de même couleur)
6. Dénombrer le nombre de mains qui contiennent une couleur (i.e. 5 cartes de même couleur, sans quite flush)
7. Dénombrer le nombre de mains qui contiennent une double paire (i.e. 2 cartes de même hauteur et 2 autres cartes de même hauteur, sans carré ni full)
8. Dénombrer le nombre de mains qui contiennent au moins 2 piques.
9. Dénombrer le nombre de mains qui contiennent exactement 1 roi et 1 cœur.

03.2 On tire successivement avec remise p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Déterminer le nombre de tirages amenant p numéros dans l'ordre strictement croissant.

03.3 Démontrer par une preuve combinatoire la formule de Vandermonde : pour tous $a, b, p \in \mathbb{N}$,

$$\binom{a+b}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$$

03.4 Une fourmi se déplace sur le quadrillage d'un plan muni d'un repère orthonormé. A chaque pas, elle se déplace entre deux points de forme (k, ℓ) où $k, \ell \in \mathbb{Z}$.
Elle se trouve initialement au point $(0, 0)$.

1. Si on suppose qu'elle ne se déplace qu'horizontalement à chaque pas, combien de chemins possibles peut-elle parcourir pour revenir en $(0, 0)$ au bout de n pas ?
2. Si on suppose qu'elle ne peut aller que vers la droite et vers le haut à chaque pas, combien de chemins possibles peut-elle parcourir pour arriver au point (n, m) (avec $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$)
3. Retrouver la formule de Pascal :

$$\binom{n+m}{n} = \binom{n+m-1}{n-1} + \binom{n+m-1}{n}$$

03.5 On appelle involution de $[\![1, n]\!]$, toute application f de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ telle que $f \circ f = Id$. On note t_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$ pour $n \geqslant 1$, et par convention $t_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $t_{n+1} = t_n + nt_{n-1}$.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} t_n \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x tel que $|x| < 1$. On note $f(x)$ sa somme. Montrer que la fonction f admet un développement limité en 0 à tout ordre.
3. On admettra que pour tout réel x tel que $|x| < 1$, f est dérivable et que $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. Trouver une relation entre f et f'.
4. A l'aide de la fonction $g(x) = e^{-x-\frac{x^2}{2}} f(x)$, montrer qu'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$. En déduire la valeur de t_n sous la forme d'une somme.