Exercice 1

On considère une urne qui contient a boules blanches et b boules noires ($a, b \in \mathbb{N}^*$). On pose $N = a + b$, $p = \dfrac{a}{N}$ et $q = 1 - p = \dfrac{b}{N}$.
On effectue une succession de tirages de boules dans cette urne. On note alors X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des k premiers tirages.

1. On suppose que les tirages se font avec remise.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité que la première boule blanche soit obtenue au k-ième tirage.
   (b) Déterminer la loi de X_k.
   (c) Soient $k, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $r \leqslant k$. Déterminer la probabilité qu'on obtienne la r-ième boule blanche au k-ième tirage.
2. On suppose que les tirages se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X_k.
   (b) Même question que 1(c).
3. On se replace dans le cas de tirages avec remise et on fait à présent $2n + 1$ tirages ($n \in \mathbb{N}$).
   On suppose à présent que $a = b$ et donc que $p = q = \dfrac{1}{2}$.
   On note $Y = X_{2n+1}$ le nombre de boules blanches obtenues et Z le nombre de boules noires obtenues.
   (a) Quelle est la probabilité que l'on obtienne plus de boules blanches que de noires au cours des $2n + 1$ lancers ?
   (b) Notons A_k : "On obtient la $(n + 1)$-ième boule blanche au k-ième tirage". Montrer que $[Y > Z] = \bigcup\limits_{k=n+1}^{2n+1} A_k$.
   (c) Déduire des questions précédentes et de la question 1 que :
   $$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{\binom{k-1}{n}}{2^k} = \frac{1}{2}$$