Exercice 1

Soit T une variable aléatoire admettant une densité f qui est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $]0, +\infty[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.
Si F est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on note D et π les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ D(t) = 1 - F(t) = \mathbb{P}([T > t]) \quad \text{et} \quad \pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)}$$

1. Dans cette question, T suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{2}{3}$.
   (a) Calculer $D(t)$ pour tout réel positif t.
   (b) Montrer que pour tout réel t positif, on a $\pi(t) = \dfrac{3}{2}$.
2. On suppose dans cette question que la densité f de la variable aléatoire T est définie par :
$$f(t) = \begin{cases} te^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$
   (a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
   (b) A l'aide de la densité d'une variable aléatoire normale centrée réduite, montrer que :
$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$
   (c) Calculer l'espérance de la variable T.
   (d) Déterminer la loi de la variable aléatoire T^2. En déduire la variance de la variable aléatoire T.
   (e) Calculer $D(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.
   (f) Calculer $\pi(t)$ pour tout réel t positif.
3. On suppose dans cette question qu'il existe une constante α strictement positive telle que l'on a : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \pi(t) = \alpha$.
   (a) Pour tout réel t positif, on pose $g(t) = e^{\alpha t} D(t)$. Montrer que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) En déduire que T suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On pourra remarquer que la fonction f est paire.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant f comme densité. On notera F_X sa fonction de répartition. La variable X admet-elle une espérance ?
3. On note $Y = \ln(|X|)$ et on admet que Y est bien une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note F_Y sa fonction de répartition.
   Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $F_Y(x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x)$.
4. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité. Proposer une densité de Y, donner son espérance et sa variance.

Exercice 3

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. On note $Y = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
   (a) Montrer que Y admet pour densité la fonction g définie par :
$$\forall x \in [0,1],\ g(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (b) Calculer l'espérance de $1 - Y$ et l'espérance de $(1 - Y)^2$.
   (c) En déduire l'espérance et la variance de Y.
2. On range les X_i par ordre croissant, et on obtient la suite de variables $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$, (Z_1 est le minimum des X_i, …, Z_n est le maximum des X_i).
   Soit x un réel fixé. On note N_x le nombre de variables X_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) vérifiant $[X_i \leqslant x]$.
   (a) Donner la loi de N_x.
   (On distinguera les cas où $x < 0$, $x > 1$, $x \in [0, 1]$).
   (b) Comparer $[N_x \geqslant r]$ et $[Z_r \leqslant x]$ pour tout r de $[\![1, n]\!]$.
   (c) Exprimer alors la fonction de répartition de Z_r sous forme d'une somme. La variable Z_r possède-t-elle une densité ?