Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. On note φ sa densité de probabilité et Φ sa fonction de répartition.
On admet que X admet des moments de tous ordres.

1. On considère la variable aléatoire $Z = X^2$.
   Déterminer une densité de Z.
2. Montrer que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. On notera Φ^{-1} l'application réciproque.
3. On considère la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = -\ln(1-\Phi(x))$$

   et la variable aléatoire $Y = g(X)$. Calculer la fonction de répartition de Y.
   En déduire la loi de Y, son espérance et sa variance.
4. (a) Vérifier que : $\forall x > 0,\ 1-\Phi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$.

   (b) Montrer que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^{-2}\varphi(t)dt \leqslant x^{-3} \int_x^{+\infty} t\varphi(t)dt$,
   puis en déduire que :

$$\forall x > 0, \quad 1 - \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \leqslant 1$$

   (c) Montrer l'équivalence : $1-\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}$.
5. (a) Montrer que :

$$\forall x > 1, \quad \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leqslant \ln(x) - g(x) + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{x^2}{2} \leqslant 0$$

   (b) En déduire l'équivalence : $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.