Exercice 1

Soit T une variable aléatoire discrète telle que $T(\Omega) = \mathbb{N}$. On souhaite montrer que : $\big(\ \mathbb{E}[T] \text{ existe}\big) \iff \big(\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(T \geqslant n) \text{ converge}\big)$, et que dans le cas où l'une des deux conditions précédentes est vérifiée, on a

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T \geqslant k).$$

1. (a) Exprimer $\mathbb{P}(T = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(T \geqslant k)$ et de $\mathbb{P}(T \geqslant k+1)$.

   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$,
   $$\sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T \geqslant k) - n\mathbb{P}(T \geqslant n).$$
2. Justifier que si la série de terme général $\mathbb{P}(T \geqslant n)$ converge, alors T admet une espérance.
3. On suppose que T admet une espérance.

   (a) Montrer que $n\mathbb{P}(T \geqslant n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} k\mathbb{P}(T = k)$ et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(T \geqslant n) = 0$.

   (b) En déduire que $\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T \geqslant k)$.
4. Le nombre X de visiteurs à une exposition suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \neq 0$. Une fois qu'on connaît effectivement le nombre de visiteurs, disons n, on met dans une urne $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On tire enfin une boule de cette urne et on note Y son numéro.

   (a) Que vaut $Y(\Omega)$?

   (b) Discuter en fonction de k et n des valeurs de la probabilité $\mathbb{P}_{[X=n]}(Y = k)$.

   (c) Montrer que $\mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{1}{\lambda}\mathbb{P}(X > k)$.

   (d) Expliquer comment la question 3(b) vous permet de contrôler ce résultat.