On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$.

1. (a) Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.
   (b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
   (c) Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tous réels a et b appartenant à $[n, +\infty[$, on a : $\left|\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{(a-b)}{b^2}\right| \leqslant \dfrac{(a-b)^2}{n^3}$.
   (b) En déduire, pour $x \geqslant 0$ et pour tout $h \neq 0$ tel que $x + h \geqslant 0$, la nature de la série de terme général
   $$|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$$
   (c) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour $x \geqslant 0$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \geqslant 0$,
   $$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K\,|h|$$
   (d) En déduire que F est dérivable sur $[0, +\infty[$, et $F' = G$.
3. Soit $x \geqslant 0$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leqslant f_k(x)$$
   (b) En déduire que pour $n \geqslant 2$,
   $$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt$$
   (c) En déduire que $\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{x+1} + \ln(1+x)$.
   (d) Donner alors un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.