Le devoir comporte un exercice et deux problèmes indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 3 pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice

On rappelle que la fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ *et que pour tout* x *de* $]-1,1[$, $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ converge.
2. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$, montrer que $I = \pi$.

Problème 1

Soit h la fonction déterminée par : $\begin{cases} \forall u \in \mathbb{R}^{+*}, & h(u) = u\ln(u), \\ \forall u \in \mathbb{R}^{-}, & h(u) = 0. \end{cases}$

Partie 1 - Étude de la fonction h.

1. Justifier que h est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier l'inégalité suivante :

$$(\mathcal{I}) : \qquad \forall u \in \mathbb{R}^+,\ h(u) \geqslant u - 1$$

avec égalité si et seulement si $u = 1$.

Partie 2 - Entropie des variables aléatoires discrètes d'univers image fini.

Soit X une variable discrète définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(x_1 < x_2 < \cdots < x_n)$.
On appelle **entropie de** X, le réel $H(X)$ défini par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} h(p_i) \quad \text{avec } \forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i = \mathbb{P}([X = x_i]) > 0.$$

1. Soient B_p la variable de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, de variance $\mathbb{V}(B_p)$, d'entropie $H(B_p)$ et φ la fonction définie par :

$$\forall p \in]0,1[, \quad \varphi(p) = H(B_p) - \mathbb{V}(B_p).$$

   (a) Montrer que l'expression de $\varphi(p)$ en fonction de p est donnée par : $\forall p \in]0,1[, \quad \varphi(p) = -p\ln(p) + (p-1)\left(p + \ln(1-p)\right)$.

   (b) Calculer la dérivée seconde φ'' de φ et calculer $\varphi'\left(\dfrac{1}{2}\right)$. En déduire les variations de φ.

   (c) Prouver enfin que $\forall p \in]0,1[, \quad \mathbb{V}(B_p) \leqslant H(B_p)$.

2. Soient n un entier non nul et U_n une variable uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

   (a) Vérifier que $H(U_n) = \ln(n)$.

   (b) Rappeler l'expression de la variance $\mathbb{V}(U_n)$ de U_n et établir que

$$H(U_n) = \frac{1}{2}\ln\left(12\,\mathbb{V}(U_n) + 1\right).$$

3. Montrer, en utilisant l'inégalité $(\mathcal{I})$ pour les np_i, que pour toute variable aléatoire discrète X, à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, telle que $p_i = \mathbb{P}([X = x_i])$,

$$H(X) \leqslant H(U_n)$$

avec égalité $H(X) = H(U_n)$ si et seulement $X = U_n$.

On a donc montré que parmi les variables aléatoires discrètes X, la loi uniforme U_n réalise le maximum de l'entropie.

Partie 3 - Entropie de variables aléatoires discrètes d'univers image infini

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
On dit que X **admet une entropie** si la série de terme général $h(p_i)$ est convergente. Si c'est le cas, on appelle **entropie de** X le réel $H(X)$ défini par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{+\infty} h(p_i), \quad \text{avec } \forall i \in \mathbb{N}^*,\ p_i = \mathbb{P}([X = x_i]) > 0.$$

1. On désigne par G_p la variable géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
   (a) Rappeler la loi de G_p (on notera pour $i \in \mathbb{N}^*$, $p'_i = \mathbb{P}(G_p = i)$) ainsi que la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(G_p)$.
   (b) Établir que G_p admet une entropie et que
   $$H(G_p) = \frac{H(B_p)}{p}.$$
   (c) L'entropie $H(G_p)$ admet-elle une limite lorsque p tend vers 0 par valeurs positives ?
   (d) Montrer que l'entropie $H(G_p)$ est négligeable devant la variance $\mathbb{V}(G_p)$ de G_p au voisinage de 0^+.
2. On suppose de plus que X admet la même espérance que la loi géométrique G_p.
   (a) Prouver que la série de terme général $p_i \ln(p'_i)$ est convergente et que :
   $$H(G_p) = -\sum_{i=1}^{+\infty} p_i \ln(p'_i).$$
   (b) Montrer, en utilisant l'inégalité $(\mathcal{I})$ pour les $\dfrac{p_i}{p'_i}$ que :
   $$H(X) \leqslant H(G_p),$$
   avec égalité si et seulement si X suit la même loi que G_p.

On a donc montré que parmi les variables aléatoires discrètes X, à valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, admettant une entropie et d'espérance $\mathbb{E}(G_p)$, la loi géométrique G_p réalise le maximum de l'entropie.

Problème 2

Notations et résultats admis:

Pour tout entier naturel n, on considère une matrice $A_n = (a_{i,j}(n))_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On dit que la suite de matrices $(A_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ***converge*** *vers la matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j}$, si pour tout couple (i, j) de $[\![1, 4]\!]^2$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}$; (chaque coefficient de A_n admet une limite finie, qu'on place dans la matrice limite). On note alors*

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = A.$$

Par exemple :

$$\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 - \frac{1}{n} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + e^{-n} & \frac{5}{n^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $(A_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A$, et soient B et C deux matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et E une matrice de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On admet qu'on a les propriétés suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} BA_n = BA, \qquad \lim_{n \to +\infty} A_nB = AB,$$

$$\lim_{n \to +\infty} BA_nC = BAC, \qquad \lim_{n \to +\infty} A_nE = AE.$$

On note $|z|$ le module d'un nombre complexe z. On admettra le résultat suivant :

$$\lim_{n \to +\infty} |z|^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} z^n = 0$$

.

On dispose d'une urne G contenant 4 boules, d'une réserve de boules, et enfin d'une pièce de monnaie équilibrée (i.e. à chaque lancer, la probabilité d'obtenir, soit *Pile*, soit *Face*, est égale à $\frac{1}{2}$).
On effectue une suite d'épreuves aléatoires consistant à ajouter ou enlever des boules de l'urne G selon un certain protocole décrit ci-dessous. Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la *variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne G avant la n-ième épreuve.*
Ainsi, $X_1 = 4$.
Les épreuves se déroulent selon le protocole suivant :

- Si $X_n \leqslant 2$, on ajoute une boule dans G ;
- Si $X_n = 3$, on lance la pièce trois fois de suite. À l'issue de ces trois lancers :
  - ⋆ si on n'obtient aucun *Pile*, on enlève deux boules de G ;
  - ⋆ si on obtient *Pile* une fois, on enlève une boule de G ;
  - ⋆ si on obtient *Pile* deux fois ou trois fois, on ne modifie pas le contenu de G ;
- Si $X_n = 4$, on lance la pièce quatre fois de suite. À l'issue de ces quatre lancers :
  - ⋆ si on n'obtient aucun *Pile*, on enlève trois boules de G ;
  - ⋆ si on obtient *Pile* une fois, on enlève deux boules de G ;
  - ⋆ si on obtient *Pile* deux ou trois fois, on enlève une boule de G ;
  - ⋆ si on obtient *Pile* quatre fois, on ne modifie pas le contenu de G.

On suppose que l'expérience précédente est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On considère pour tout entier naturel n non nul, l'élément U_n de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \mathbb{P}([X_n = 3]) \\ \mathbb{P}([X_n = 4]) \end{pmatrix}.$$

1. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_n(\Omega) \subset [\![1, 4]\!]$.
   (b) Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = k]$.
2. En déduire qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_{n+1} = AU_n$.
3. On pose $B = 16\,A$.
   (a) Montrer que le nombre complexe λ est valeur propre de B si et seulement si $\frac{\lambda}{16}$ est valeur propre de A.
   (b) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de B est :
   $$Sp(B) = \{16,\ 1,\ -4 - 4i,\ -4 + 4i\},$$
   où i désigne le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
   (c) En déduire les valeurs propres de A.
4. Déterminer le vecteur propre V de A associé à la valeur propre 1, dont la somme des coordonnées est égale à 1.
5. (a) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice inversible Q dont la première colonne est V, vérifiant la relation $A = QDQ^{-1}$.
   (b) Établir l'égalité :
   $$\lim_{n\to+\infty} A^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$
6. Soit $L = \begin{pmatrix} x & y & z & u \end{pmatrix}$ la première ligne de Q^{-1}. On note ${}^tM$ la transposée d'une matrice M.
   (a) En considérant l'égalité $Q^{-1}A = DQ^{-1}$, montrer que ${}^tL$ est vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1.
   (b) En utilisant la relation ${}^tA\,{}^tL = {}^tL$, en déduire que $x = y = z = u$.
   (c) Utiliser la relation $Q^{-1}Q = I$ pour montrer que $x = y = z = u = 1$ (I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$).
7. Montrer que les quatre colonnes de $\lim_{n\to+\infty} A^n$ sont égales à V.
8. En déduire pour tout k de $[\![1, 4]\!]$, la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k])$.