Exercice

Un dispositif de comptage dénombre les visiteurs qui entrent dans un musée. On note $X_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la variable aléatoire X_n qui donne le nombre de visiteurs ayant passé le portail entre les instants 0 et n.
On se place dans le cas où les variables sont telles que pour tous entiers $0 \leqslant m \leqslant n$, X_m et $X_n - X_m$ sont indépendantes, et $X_n - X_m$ suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha(n-m)$ (α est un réel strictement positif donné). Soient $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, avec $0 \leqslant m \leqslant n$.

1. Quelle est la loi de X_m ?
   (On pourra remarquer que $X_m = X_m - X_0$).

2. Calculer $\mathbb{E}(X_m(X_n - X_m))$ puis $\text{cov}(X_m, X_n)$.

3. Quelle est la loi du couple (X_m, X_n) ?

4. Pour $n \neq 0$, on pose $p = \dfrac{m}{n}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer la loi conditionnelle de X_m sachant que $[X_n = k]$, puis reconnaître cette loi.

5. On note N la variable aléatoire qui prend pour valeur le plus petit entier $n > 0$ tel qu'il soit entré au moins un visiteur entre les instants 0 et n. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[N = n]$ en fonction de X_{n-1} et X_n, puis déterminer la loi de N, son espérance, sa variance.