Exercice

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
On note φ sa densité et Φ la fonction de répartition de X.

1. On pose $Y = e^{X+1}$.
   (a) Déterminer en fonction de Φ la fonction de répartition de Y.
   (b) En déduire une densité f de Y.
   (c) La variable Y admet-elle une espérance ?
2. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = 2\varphi(x)\Phi(x)$$

   (a) Montrer que g soit une densité de probabilité.
   (b) Soit Z une variable aléatoire réelle admettant pour densité la fonction g. Déterminer en fonction de Φ la fonction de répartition de Z.
   (c) Montrer que Z admet une espérance et que $\mathbb{E}[Z] = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.
   (d) Montrer que Z admet une variance et que $\mathbb{V}[Z] = \dfrac{\pi - 1}{\pi}$.