Exercice 1

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{n^2}{3^n} + \dfrac{2}{(n+1)!}$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge et déterminer sa somme.
2. Déterminer un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(\alpha u_n)_{n \geqslant 0}$ définisse une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

Exercice 2

Un jeu consiste une succession de plusieurs "parties" où on lance deux dés non truqués et on calcule la somme des points indiqués par les deux dés. Tous les lancers de dés sont indépendants.

On se propose de calculer la probabilité de l'événement E : "dans la suite des résultats observés, la première obtention d'une somme égale à 9 a lieu avant la première obtention éventuelle d'une somme égale à 7".

On note pour tout $i \geqslant 1$, F_i : "on obtient 9 à la i-ième partie" et H_i : "on n'obtient ni 7 ni 9 à la i-ième partie".

De plus, on note G_1 : "on obtient une somme égale à 7 à la première partie" et pour tout $n \geqslant 2$, E_n : "on n'obtient ni 7 ni 9 au cours des $n-1$ premières parties et la n-ième partie donne un 9" (et par convention on pose $E_1 = F_1$).

1. Calculer $\mathbb{P}(F_1)$, $\mathbb{P}(G_1)$ puis $\mathbb{P}(H_1)$.
2. Exprimer l'événement E à l'aide des événements $(E_i)_{i \geqslant 1}$. Exprimer de même pour $i > 1$ chaque E_i à l'aide des événements $(F_k)_{k \geqslant 1}$ et $(H_k)_{k \geqslant 1}$.
3. Calculer $\mathbb{P}(E_i)$ pour $i > 1$ et vérifier que la formule reste valable pour $i = 1$.
4. Calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right)$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.
5. On décide de calculer $\mathbb{P}(E)$ par une deuxième méthode. Calculer $\mathbb{P}_{F_1}(E)$, $\mathbb{P}_{G_1}(E)$ et $\mathbb{P}_{H_1}(E)$. En déduire $\mathbb{P}(E)$.