Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer f^2 en fonction de f et Id_E.
2. En déduire que f est bijectif et déterminer f^{-1}.
3. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
4. Calculer les valeurs propres possibles de f.
5. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
6. Déterminer f^n pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 2

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ en notant :

$$\forall k \in [\![0,3]\!], \quad f_k : x \mapsto x^k e^{-x}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F. En déduire $\dim(F)$.
2. Montrer que l'application Δ de F vers F définie par la relation :
$$\forall f \in F,\ \Delta(f) = f' - f''.$$
est un endomorphisme de F et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
3. La matrice M est-elle inversible ? diagonalisable ?