Exercice (Oral ESCP)

1. Pour $n \geqslant 1$, on pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Étudier la suite (a_n) définie par $\forall n \geqslant 1, a_n = H_n - \ln(n)$
   (b) Montrer qu'il existe un réel γ de $[0, 1]$ tel que :
   $$H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$
2. On se propose d'étudier la nature de la série de terme général :
   $$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$$
   (a) Soit (b_n) une suite réelle décroissante de limite nulle.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$.
   Montrer que les suites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sont adjacentes et en déduire que la série de terme général $(-1)^n b_n$ est convergente.
   (b) Montrer que :
   $$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} H_n + \sum_{k=1}^{n} w_k,$$
   où w_k est le terme général d'une série convergente. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(\ln(u_n) + \frac{1}{2}\ln(n)\right) = L$$
   En déduire la nature de la série de terme général u_n.