CHAPITRE 15

Fonctions de plusieurs variables

Ce chapitre a pour objectif d'étudier les fonctions définies sur une partie U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et plus particulièrement la recherche d'extremum locaux.
Le cours est énoncé principalement pour les fonctions de deux variables, mais les résultats se généralisent de même au cas de $3, 4, \ldots n$ variables

15.1 Notions élémentaires de topologie

Définition 1

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. On appelle **distance de A à B** le réel $d(A, B)$ égal à :

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Remarques :

- **R 1** – On appelle cette notion de distance la **distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$**.
- **R 2** – La distance entre deux points est toujours un réel positif.
- **R 3** – Pour deux points en dimension n, $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $B(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, on définit de même la distance de A à B :

$$d(A,B) = \sqrt{\sum_{p=1}^{n} (x_p - y_p)^2}$$

Définition 2

Soit $r > 0$ et soit A un point de $\mathbb{R}^n$. On appelle **boule ouverte de centre A et de rayon r** l'ensemble $B(A, r)$ définie par :

$$B(A,r) = \{M \in \mathbb{R}^n \;/\; d(M,A) < r\}$$

Définition 3

Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite **ouverte** si pour tout point $M \in U$, il existe une boule ouverte centrée sur M qui soit incluse dans U :

$$\forall M \in U, \quad \exists r > 0 \ / \ B(M,r) \subset U$$

Exemples :

- **E 1** – Une boule ouverte est un ouvert
- **E 2** – Un produit cartésien d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert.
- **E 3** – $]-1,3[\times]0,+\infty[$ est un ouvert
- **E 4** – $\mathbb{R}^2$ est un ouvert
- **E 5** – $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert
- **E 6** – $\{0\} \times \mathbb{R}$ n'est pas un ouvert

15.2 Calcul différentiel

15.2.1 Applications partielles

Définition 4

Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et soit $A = (a,b)$ un point de U.
On définit la **première application partielle f_1 au point A** par :

$$f_1 : t \mapsto f(t,b)$$

On définit la **seconde application partielle f_2 au point A** par :

$$f_2 : t \mapsto f(a,t)$$

Remarques :

- **R 1** – Une application partielle est une fonction d'une seule variable.
- **R 2** – La k-ième application partielle ne fait "varier" que la k-ième variable de f, les autres étant alors considérées comme des constantes.
- **R 3** – Plus généralement, si U une partie de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un point de U, on définit la k-ième application partielle f_k au point A est définie par :

$$f_k : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

Définition 5 **Continuité pour les fonctions de deux variables**

Soit f une fonction de deux variables de U dans $\mathbb{R}$ et soit $A = (a,b)$ un point de $\mathbb{R}^2$.
On dit que la fonction f est continue au point A si et seulement si :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

On dit que f est continue sur un ensemble $U \subset \mathbb{R}^2$ si f est continue en tout point de U.

15.2.2 Dérivées partielles d'ordre 1

Définition 6 **Dérivées partielles d'ordre 1**

Soit f une fonction de deux variables, définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$ et soit $A(a,b)$ un point de U.

- On dit que f **admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x au point (a,b)** si la fonction $t \mapsto f(t,b)$ est dérivable en a, c'est-à-dire si : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est alors notée :
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}$$
- On dit que f **admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y au point (a,b)** si la fonction $t \mapsto f(a,t)$ est dérivable en b, c'est-à-dire si : $\lim\limits_{y\to b} \dfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$ existe et est finie. Cette limite est alors notée :
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$$

Remarque :

Soit f est une fonction de n variables définie sur une partie U de $\mathbb{R}^n$ et si $A(a_1,\dots,a_n) \in U$:
$$f : (x_1,x_2,\dots,x_n) \longmapsto f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$
Si la k-ième application partielle f_1 au point $A=(a_1,\dots,a_n)$ est dérivable en a_k, on dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la k-ième variable en A**. La valeur de cette dérivée est notée :
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1,\dots,a_n)$$

Définition 7 **Fonction différentiable, de classe $\mathcal{C}^1$**

Si les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur U, on dit que la fonction f est **de classe $\mathcal{C}^1$ sur U**, ou que la fonction f est **différentiable sur U**.

Remarque :

Les applications partielles sont des fonctions d'une variable réelle. On peut donc appliquer tous les résultats d'opérations sur les fonctions dérivables et de classe $\mathcal{C}^1$ pour démontrer qu'une fonction de deux variables est dérivable par rapport à l'une ou l'autre de ses variables ou qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad f(x,y)=ye^{-x^2-y}$.
La fonction $(x,y)\mapsto -x^2-y$ admet des dérivées partielles par rapport à x et y (c'est une fonction polynômiale), et la fonction exponentielle est dérivable. Par composition, puis par produit par y, la fonction f admet bien des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$. De plus, on a :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xye^{-x^2-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1-y)e^{-x^2-y}$$

15.2.3 Développement limité d'ordre 1

Théorème 8 ***Formule de Taylor-Young***

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U et soit (a,b) un point de U. Alors il existe un voisinage de (a,b) et une fonction ε définie sur ce voisinage tels que en tout point (x,y) de ce voisinage :

$$\boxed{f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\,\varepsilon(x,y)}$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y) = 0$

Remarques :

R 1 – On peut aussi écrire que pour tout point $H(h,k)$ au voisinage de $O(0,0)$ tel que le point $(a+h,b+k)$ soit encore dans l'ouvert U, on a :

$$\boxed{f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \underset{H\to 0}{o}\big(d(O,H)\big)}$$

R 2 – L'égalité précédente (ou celle équivalente énoncée dans le théorème) s'appelle le **développement limité d'ordre 1 de f en (a,b)**.

R 3 – On peut faire une analogie avec le développement limité d'ordre 1 pour une fonction g d'une variable :

$$g(a+h) = g(a) + hg'(a) + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

Définition 9 **Différentielle en un point**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U et soit $A=(a,b)$ un point de U. L'application :

$$(h,k) \longmapsto h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

s'appelle la **différentielle de f au point $A(a,b)$**. On la note $d_A f(h,k)$.

Remarques :

R 1 – La différentielle de f au point A est une application linéaire de deux variables, puisqu'elle est de la forme :

$$(h,k) \mapsto \alpha h + \beta k$$

avec α et β deux constantes réelles.

R 2 – Avec les notations de la différentielles, le développement limité d'ordre 1 peut s'écrire, en notant $A=(a,b)$, $H=(h,k)$, $O=(0,0)$,

$$\boxed{f(a+h,b+k) = f(a,b) + d_A(h,k) + o(d(O,H))}$$

15.2.4 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 10 **Dérivées partielles d'ordre 2**

Lorsque f admet deux dérivées partielles d'ordre 1 : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ces deux fonctions sont des fonctions de deux variables et donc peuvent admettre elles-mêmes des dérivées partielles d'ordre 1.
On appelle ces dérivées partielles d'ordre 2 de f. Il peut en exister quatre que l'on note de la façon suivante :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$

Exemple :

Reprenons la fonction $f : (x, y) \mapsto ye^{-x^2-y}$ pour laquelle on a calculé pour tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xye^{-x^2-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (1-y)e^{-x^2-y}$$

Les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admettent bien chacune encore des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y, et on a pour tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2y(1-2x^2)e^{-x^2-y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2x(1-y)e^{-x^2-y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2x(1-y)e^{-x^2-y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (-2+y)e^{-x^2-y}$$

Définition 11

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et si ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont également de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors on dit que **f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.**

Théorème 12 ***Théorème de Schwarz***

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U, alors, on a pour tout point (a, b) de U :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

Remarque :

Le théorème précédent nous indique donc que, sous la condition que f soit de classe $\mathcal{C}^2$, cela revient au même
- dériver la fonction f par rapport à une variable x_i, puis de la dériver par rapport à une variable x_j
- dériver la fonction f d'abord par rapport à une variable x_j, puis de la dériver par rapport à la variable x_i

15.3 Fonctions homogènes

15.3.1 Définition

Définition 13

Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^2$ est appelé un **cône positif de $\mathbb{R}^2$** si pour tout $(x, y) \in C$ et pour tout $t > 0$, on a $(tx, ty) \in C$.

Exemple :

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y > 0\}$. C'est un cône positif de $\mathbb{R}^2$. Car si $(x, y) \in C$, alors $\forall t > 0,\ tx + ty = t(x + y) > 0$, donc $(tx, ty) \in C$.

Définition 14

Soit f une fonction définie sur un cône positif C de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est une **fonction homogène de degré k sur C** si :

$$\boxed{\forall t > 0,\ \forall (x, y) \in C, \quad f(tx, ty) = t^k f(x, y)}$$

Exemples :

- **E 1** – Soit f la fonction définie par $f(x, y) = 2x^3y^4$.
  On a pour tout $t > 0$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(tx, ty) = 2(tx)^3(ty)^4 = t^7(2x^3y^4) = t^7 f(x, y)$, donc f est homogène de degré 7.
- **E 2** – Plus généralement, toute fonction de la forme $f(x, y) = cx^k y^\ell$ est homogène de degré $k + \ell$.
- **E 3** – Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ (cône positif) par $g(x, y) = x^2 + xy + y^2$.
  On a $\forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(tx, ty) = t^2 g(x, y)$, donc g est homogène de degré 2.
- **E 4** – Soit h la fonction définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par : $h(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4 + y^4}}$.
  Alors, $\forall (x, y) \in U, \forall t > 0,\ h(tx, ty) = t^{-2} h(x, y)$, donc h est homogène de degré -2.

Théorème 15

(Admis) Soit f une fonction homogène de degré k et de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont encore des fonctions homogènes, de degré $k - 1$.

15.3.2 Théorème d'Euler

Théorème 16 ***Théorème d'Euler***

Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U =]0, +\infty[^2$.
Alors :

$$\boxed{f \text{ homogène de degré } k \text{ sur } U \iff \forall (x, y) \in U,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = kf(x, y)}$$

Remarque :

L'égalité écrite dans le théorème précédent s'appelle l'**Identité d'Euler**.

15.4 Problèmes d'exrema

15.4.1 Définitions

Définition 17

Soit f une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$. Soit $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que f **admet un maximum local en** $A = (a, b)$ si et seulement si il existe une boule ouverte $B(A, r)$ telle que :
$$\forall (x, y) \in B(a, r) \cap U,\ f(x, y) \leqslant f(a, b)$$
- On dit que f **admet un minimum local en** $A = (a, b)$ si et seulement si il existe une boule ouverte $B(A, r)$ telle que :
$$\forall (x, y) \in B(a, r) \cap U,\ f(x, y) \geqslant f(a, b)$$

Remarques :

R 1 – On parle d'extremum pour parler de maximum ou de minimum.

R 2 – Au singulier : maximum, minimum, extremum.
Au pluriel : maximums, minimums, extremums ou maxima, minima, extrema.

R 3 – Les définitions précédentes sont des définitions d'extrema locaux. On peut également définit un extrema global :
Par exemple, f admet un maximum global en (a, b) si $\forall (x, y) \in U,\ f(x, y) \leqslant f(a, b)$.
Un extremum global est bien entendu local, la réciproque étant fausse.

Définition 18

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. On appelle **point critique de** f un point (a, b) qui vérifie :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0}$$

Théorème 19 ***Condition nécessaire d'extremum SUR UN OUVERT***

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Si f admet un extremum local en $A = (a, b)$, alors nécessairement A est un point critique de f.

Remarques :

R 1 – Pour chercher les extrema d'une fonction de plusieurs variables, on commence toujours à regarder les points critiques qui seront des candidats potentiels pour les extrema locaux.

R 2 – Une fois les points critiques déterminés, il faut ensuite vérifier si chacun des points critique est effectivement un minimum/maximum ou non : on étudie le signe de $f(x, y) - f(a, b)$ pour (x, y) au voisinage du point (a, b) ou de manière équivalente, on etudie le signe de $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ pour (h, k) au voisinage de $(0, 0)$.

R 3 – Une étude locale suffit : penser aux équivalents et aux développements limités.

R 4 – ATTENTION : la méthode précédente ne marche QUE sur les ouverts. Si f est définie sur D qui n'est pas un ouvert, étudier f en deux étapes : à l'intérieur de D (qui sera un ouvert), et étudier f sur le bord de D.

15.4.2 Extrema liés sous contrainte linéaire

Définition 20 **Extremums sous contrainte linéaire**

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et soit D une droite de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation :

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Longleftrightarrow g(x,y) = 0 \quad \text{avec } g(x,y) = \alpha x + \beta y - \gamma = 0$$

On dit que (a,b) est un **extremum local de f sous la contrainte** $g(x,y) = 0$ si et seulement si (a,b) est un extremum local de la restriction de f à D.

Remarques :

- **R 1** – Au programme de B/L, lorsqu'on aura une contrainte sur un extremum, la contrainte sera toujours LINEAIRE, i.e. du type : $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$, où $x_1, \ldots, x_n$ désignent les n variables de la fonction f.
- **R 2** – Puisque la contrainte est linéaire, on pourra toujours trouver une relation entre les variables, i.e. exprimer une variable en fonction des autres. On se ramène donc à un problème d'extremum (sans contrainte) pour une fonction de $n-1$ variables, comme dans la partie précédente.

Définition 21 **Lagrangien**

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soit g la fonction de contrainte : $g(x) = \alpha x + \beta y - \gamma$ de telle sorte que la contrainte soit de la forme "$g(x) = 0$". On définit alors le Lagrangien de f comme la fonction :

$$L(x,y,t) = f(x,y) - tg(x,y)$$

Remarque :

La fonction L admet donc une variable en plus : la variable t

Théorème 22 ***Théorème des Extremas Liés***

Soit f une fonction définie sur un ouvert U et soit g une fonction de contrainte "$g(x,y) = 0$". Soit L le lagrangien associé : $L(x,y,t) = f(x,y) - tg(x,y)$.
Si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) sous la contrainte $g(x,y) = 0$, alors il existe un réel t_0 tel que le Lagrangien admette un point critique (x_0, y_0, t_0). On a alors :

$$\alpha t_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad \beta t_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

*Le réel t_0 s'appelle le **multiplicateur de Lagrange de f en** (x_0, y_0).*
Si (x_0, y_0) est un max. de $(x,y) \mapsto L(x,y,t_0)$, alors c'est un maximum de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$
Si (x_0, y_0) est un min. de $(x,y) \mapsto L(x,y,t_0)$, alors c'est un minimum de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$

Remarque :

Si on a n variables et qu'on a plusieurs fonctions de contrainte $g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $g_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots$, on définit de même le Lagrangien : $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_p) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{k=1}^{p} t_k g_k(x_1, \ldots, x_n)$.
Il y aura alors p multiplicateurs de Lagrange en chaque point critique