4

OPTION B/L

Exercice 4.1.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, périodique de période $T > 0$.

1. Montrer que l'application I définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$I(a) = \int_a^{a+T} f(t)dt$$

est constante. On note I cette constante.

2. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)\,dt\Big) = \frac{I}{T}$$

3. a) Soit F une primitive de f. A quelle condition F est-elle périodique ?

b) Montrer que si f admet une primitive F qui est bornée sur $\mathbb{R}$, alors F est périodique.

Solution :

1. Utilisons la relation de Chasles. Soit a, b deux réels.

$$I(a) = \int_a^{a+T} f(u)\,du = \int_a^{b} f(u)\,du + \int_b^{b+T} f(u)\,du + \int_{b+T}^{a+T} f(u)\,du$$

Le changement de variable affine $u = v + T$ dans la dernière intégrale et la périodicité de f donnent :

$$\int_{b+T}^{a+T} f(u)\,du = \int_{b}^{a} f(v)\,dv = -\int_{a}^{b} f(v)\,dv$$

Ainsi, pour tous a, b réels :

$$I(a) = \int_{a}^{a+T} f(u)\,du = \int_{b}^{b+T} f(u)\,du = I(b)$$

ce qui signifie que la fonction I est constante égale à $\displaystyle\int_0^T f(u)\,du$.

Autre méthode : soit F une primitive de f. On a : $I(a) = F(a+T) - F(a)$, et comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ il en est de même de I, avec

$$I'(a) = F'(a+T) - F'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$$

Ce qui prouve que I est constante.

2. L'idée est de découper le segment $[a, a+x]$ en intervalles de longueur T, puis d'utiliser la question précédente. Ainsi, on peut écrire :

$$a < a+T < a+2T < \cdots < a+kT < a+x$$

L'intervalle $[a, a+x]$ étant de longueur x, l'entier $k = \lfloor x/T \rfloor$, est la partie entière de x/T. Par la question précédente :

$$\int_{a}^{a+x} f(u)\,du = kI + \int_{a+kT}^{a+x} f(u)\,du$$

Or, lorsque x tend vers $+\infty$, $\lfloor x/T \rfloor \sim x/T$.

La fonction f est périodique et continue, donc bornée sur $\mathbb{R}$ et avec $M = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f|$:

$$\Big|\int_{a+kT}^{a+x} f(u)\,du\Big| \leqslant \int_{a+kT}^{a+x} |f(u)|\,du \leqslant \int_{a+kT}^{a+(k+1)T} |f(u)|\,du \leqslant MT$$

Et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{a+kT}^{a+x} f(u)\,du = 0$$

et, pour x au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{x}\int_{a}^{a+x} f(u)\,du \sim \frac{1}{x}\times\frac{x}{T} I = \frac{I}{T}$$

3. a) Toute primitive F de f est de la forme $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(u)\,du + C$.

$\star$ Supposons que F soit T-périodique. Alors :

$F(x+T) = F(x)$, soit $\displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\,du = 0$ ou encore $\displaystyle\int_0^T f(u)\,du = 0$.

$\star$ Réciproquement, supposons que $\displaystyle\int_0^T f(u)\,du = 0$. Alors :

$$F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(u)\,du = \int_0^T f(u)\,du = 0$$

et F est T-périodique.

La condition demandée est donc $\displaystyle\int_0^T f(u)\,du = 0$.

b) Soit F une primitive de f bornée sur $\mathbb{R}$ par C. Alors :

$$\left|\int_a^{a+x} f(u)\,du\right| = \frac{|F(x+a) - F(a)|}{x} \leqslant \frac{2C}{x}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Par la question 2, il vient $I = 0$. On conclut par la question précédente.

Exercice 4.2.

Soit N un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$; on note $q = 1 - p$.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (1 - q^n)^N$

1. Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la convergence de la série de terme général u_n.

On note alors : $M = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On considère N urnes $U_1, \ldots, U_N$ identiques. Chacune contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion q.

On effectue des tirages avec remise dans ces urnes. On procède de la manière suivante :

• au premier tirage, on tire une boule de chaque urne ;

• au deuxième tirage, on tire une boule de chaque urne où une boule noire a été tirée au tirage précédent ;

• et ainsi de suite ...

On note :

• X_k le nombre d'épreuves nécessaires pour tirer une boule blanche de l'urne U_k,

• Y le nombre d'épreuves nécessaires pour tirer une boule blanche dans chacune des N urnes.

2. Exprimer Y en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_N$.

3. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $P(Y \leqslant n)$.

b) Déterminer la loi de Y.

4. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(Y > k) - nP(Y > n) = \sum\limits_{k=1}^{n} kP(Y = k)$.

b) En déduire l'existence de $E(Y)$ et son expression en fonction de M.

Solution :

1. Comme $0 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ et $(1 - q^n)^N = 1 - Nq^n + o(q^n)$.
Ainsi $u_n \sim Nq^n$.
Or q^n est le terme général d'une série géométrique convergente, ce qui prouve la convergence demandée, par la règle d'équivalence pour les séries à termes de signe fixe.

2. De manière évidente : $Y = \max\limits_{1\leq k\leq N} X_k$.

3. a) L'événement $[Y \leqslant n]$ est réalisé si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $[X_k \leqslant n]$ est réalisé. Ainsi, par indépendance des variables aléatoires (X_k) :

$$[Y \leqslant n] = \bigcap_{k=1}^{N} [X_k \leqslant n] \implies P([Y \leqslant n]) = \prod_{k=1}^{N} P([X_k \leqslant n])$$

Les tirages se faisant avec remise, la proportion des boules n'est pas modifiée au cours des tirages. Donc :

$$P([X_k \leqslant n]) = 1 - P([X_k > n]) = 1 - q^n$$

et

$$P([Y \leqslant n]) = \prod_{k=1}^{N} (1 - q^n) = (1 - q^n)^N$$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$P([Y = n]) = P([Y \leqslant n]) - P([Y \leqslant n - 1]) = (1 - q^n)^N - (1 - q^{n-1})^N$$

4. a) On sait que $P(Y = k) = P(Y > k - 1) - P(Y > k)$. Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kP(Y = k) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y > k - 1) - \sum_{k=1}^{n} k(Y > k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} (k-1)P(Y > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k(Y > k) + \sum_{k=1}^{n} P(Y > k-1)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(Y > k) - nP(Y > n)\end{aligned}$$

b) Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y > k) = 1 - (1 - q^k)^N = u_k$, et par l'équivalent trouvé dans la question 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$. Finalement :

$$E(Y) = \lim_{n\to+\infty} \big(\sum_{k=0}^{n-1} P(Y > k) - nP(Y > n)\big) = \sum_{0}^{+\infty} u_n = M$$

Exercice 4.3.

On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

L'objet de l'exercice est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation (E) d'inconnue M : $M^2 = A$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2. Démontrer que si M est une solution de (E), alors les matrices A et M commutent et tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M.

3. En déduire que toute solution de (E) est diagonalisable et déterminer toutes les solutions de (E).

Solution :

1. La matrice A étant triangulaire inférieure, on lit ses valeurs propres sur la diagonale, soit : $1, 4, 9$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 9. Un calcul élémentaire donne deux autres vecteurs propres : $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour la valeur propre 4 et $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8/3 \end{pmatrix}$ pour la valeur propre 1. Comme les sous-espaces propres sont des droites (A est carrée d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres), le calcul est achevé

2. Comme $M^2 = A$, il vient $AM = M^3 = MA$. Soit X un vecteur propre de A et λ la valeur propre associée.

On a $AX = \lambda X$. Alors $A(MX) = M(AX) = \lambda MX$. Ainsi le vecteur MX appartient au sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

Donc, soit $MX = 0$, auquel cas X est vecteur propre de M associé à la valeur propre 0, soit, il existe un scalaire μ tel que $MX = \mu X$, puisque X est une base de ce sous-espace. Dans les deux cas X est bien colonne propre de M.

3. On vient de montrer que la base choisie (e_1, e_2, e_3) de vecteurs colonnes propres de A est également une base de vecteurs colonnes propres de M. Donc M est diagonalisable avec la même matrice de passage que pour A. Ainsi, il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale $\mathrm{diag}(a, b, c)$ telles que :

$$M = P\,\mathrm{diag}(a, b, c)P^{-1}, A = P\,\mathrm{diag}(1, 4, 9)P^{-1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff P\,\mathrm{diag}(a^2, b^2, c^2)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(1, 4, 9)P^{-1} \\ &\iff \mathrm{diag}(a^2, b^2, c^2) = \mathrm{diag}(1, 4, 9) \end{aligned}$$

Cette équation matricielle admet comme solution $a = \pm 1, b = \pm 2, c = \pm 3$. Ce qui donne $8 = 2^3$ matrices M convenables.

Exercice 4.4.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On **admet** que λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$.

1. Montrer que A admet trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ telles que :

$$\lambda_1 < 1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles par

$$f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x + 8)$$

a) Montrer que $f(\lambda_2) = \lambda_2$.

b) Montrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.

c) Montrer que pour tout λ de $[1, 2]$, on a : $|f(\lambda) - f(\lambda_2)| \leqslant \frac{1}{3}|\lambda - \lambda_2|$.

3. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $x_0 \in [1, 2]$ et pour tout $n \geqslant 0$: $x_{n+1} = f(x_n)$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Solution :

1. On étudie la fonction polynomiale (continue) $g : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 4x + 8$.

La fonction g tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Elle vérifie $g(1) = 2 > 0$ et $g(2) = -4 < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ solutions de l'équation $g(x) = 0$, tels que $\lambda_1 < 1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3$.

La matrice A est diagonalisable car elle admet trois valeurs propres distinctes.

2. a) L'équation $f(x) = x$ est équivalente à $g(x) = 0$, donc $f(\lambda_2) = \lambda_2$..

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$$x \mapsto \frac{1}{6}(3x^2 - 6x + 2) = \frac{1}{2}((x-1)^2 - \frac{1}{3})$$

qui s'annule en $\alpha = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$, et $\beta = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ainsi :

x	$-\infty$		β		1		α		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	

Ceci montre que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par f, puisque f est décroissante sur $[1, \alpha]$, croissante sur $[\alpha, 2]$ et que $f(1) = f(2) = 4/3$ et $f(\alpha) > 1$ (car $f(\alpha) = \frac{13 - \alpha}{9} > \frac{11}{9}$).

c) Utilisons l'inégalité des accroissements finis : pour tout $x \in [1, 2]$:

$$|f(x) - f(\lambda_2)| \leqslant \sup_{x \in [1,2]} |f'(x)||x - \lambda_2|$$

Or $\sup_{x \in [1,2]} |f'(x)| = \frac{1}{3}$, donc :

$$|f(\lambda) - f(\lambda_2)| \leqslant \frac{1}{3}|\lambda - \lambda_2|$$

3. L'intervalle $[1, 2]$ étant stable par f, comme $x_0 \in [1, 2]$, par une récurrence simple : pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in [1, 2]$. On a alors, par une récurrence immédiate et la question précédente :

$$|x_n - \lambda_2| \leqslant \frac{1}{3^n}|x_0 - \lambda_2| \leqslant \frac{1}{3^n}$$

ce qui montre que la suite (x_n) tend vers λ_2.

Exercice 4.5.

Soit n un entier naturel. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.

1. Après avoir justifié l'existence de I_n, montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge. Déterminer sa limite.

2. Montrer que pour tout $N \geqslant 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{N} I_k = \int_0^1 \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \sin(\pi x) dx$$

3. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$ est convergente.

b) En déduire que la série de terme général I_n converge et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du$$

Solution :

1. La fonction $f_n : x \mapsto x^n \sin(\pi x)$ est continue sur $[0,1]$; ceci montre l'existence de I_n pour tout n de $\mathbb{N}$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, on a : $0 \leqslant x^n \sin(\pi x) \leqslant x^n$.

Ainsi :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. Il vient :

$$\sum_{k=0}^{N} I_k = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{N} x^k\Big) \sin(\pi x)\, dx = \int_0^1 \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \sin(\pi x)\, dx$$

(somme des premiers termes d'une suite géométrique.)

3. a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}$ est continue et positive sur $[0,1[$. Le changement de variable $u = 1-x$ donne, pour x au voisinage de 1 (donc u au voisinage de 0) :

$$\frac{\sin(\pi x)}{1-x} = \frac{\sin(\pi u)}{u} \sim \frac{\pi u}{u} = \pi$$

La fonction f admet donc un prolongement par continuité en $x = 1$.

b) On peut écrire, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{N} I_k = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx - \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{1-x} \sin(\pi x)\, dx$$

La fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée :

$$\exists\, M > 0, \forall\, x \in [0,1], |f(x)| \leqslant M$$

et :

$$\Big|\int_0^1 \frac{x^{N+1}}{1-x} \sin(\pi x)\, dx\Big| \leqslant M \int_0^1 x^{N+1}\, dx = \frac{M}{N+2}$$

ce qui achève la question en faisant tendre N vers $+\infty$.

Exercice 4.6.

1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \ln x) & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Vérifier que φ est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire admettant φ comme densité.

a) Déterminer la fonction de répartition de X.

b) Calculer, pour tout entier naturel k, le moment d'ordre k de X, c'est-à-dire l'espérance $E(X^k)$.

3. Soit a un réel de l'intervalle $[0,1[$ et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_a(x) = \begin{cases} \lambda(1 - ax^{1-a}) & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer, en fonction de a, la valeur du réel λ pour laquelle f_a est une densité de probabilité.

On suppose dans la suite que λ est ainsi choisi

b) Soit Y_a une variable aléatoire admettant f_a comme densité. Déterminer la fonction de répartition de Y_a.

4. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout entier naturel n non nul, une densité de Y_n est $f_{(1-\frac{1}{n})}$ (c'est-à-dire que $a = 1 - \dfrac{1}{n}$).

a) Soit F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n. Déterminer, pour tout réel x, la limite lorsque n tend vers l'infini de $F_n(x)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n)$.

Solution :

1. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en 0 et en 1 et elle est bien positive. On a :
$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - \ln x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\big[x\ln x - x\big]_{\to 0}^1 = 1$$
φ est bien une densité de probabilité.

2. a) Pour $x \in]0,1[$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2}(1 - \ln t)\,dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\big[t\ln t - t\big]_{\to 0}^x$.

Soit :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 0\\ x-\dfrac{x\ln x}{2} & \text{si } 0<x\leqslant 1\\ 1 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$$

b) On a :

$$E(X^k)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^k(1-\ln x)\,dx=\frac{1}{2}\Big[\int_0^1 x^k\,dx-\int_0^1 x^k\ln x\,dx\Big]$$

La première intégrale vaut $\dfrac{1}{k+1}$ et on intègre la seconde par parties :

$$\int_0^1 x^k\ln x\,dx=\Big[\frac{x^{k+1}\ln x}{k+1}\Big]_{\to 0}^1-\int_0^1\frac{x^k}{k+1}\,dx$$

Le crochet est nul et la dernière intégrale vaut $\dfrac{1}{(k+1)^2}$. Finalement :

$$E(X^k)=\frac{k+2}{2(k+1)^2}$$

3. a) On a : $\displaystyle\int_0^1(1-ax^{1-a})\,dx=1-\Big[\frac{a}{2-a}x^{2-a}\Big]_0^1=\frac{2-2a}{2-a}$.

La fonction f_a est donc une densité de probabilité lorsque :

$$\lambda=\frac{2-a}{2-2a}$$

b) Pour $x\in\,]0,1[$, on a $F_a(x)=\displaystyle\int_0^x\lambda(1-at^{1-a})\,dt=\lambda\Big[t-\frac{at^{2-a}}{2-a}\Big]_0^x$.

En remplaçant λ par sa valeur, on trouve finalement :

$$F_a(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 0\\ \dfrac{2-a}{2-2a}\left(x-\dfrac{a}{2-a}x^{2-a}\right) & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$$

4. a) Pour x dans $]0,1[$, $F_{Y_n}(x)$, notée $F_n(x)$ vaut :

$$F_n(x)=\frac{2-(1-\frac{1}{n})}{2-2(1-\frac{1}{n})}\left(x-\frac{(1-\frac{1}{n})}{2-(1-\frac{1}{n})}x^{2-(1-\frac{1}{n})}\right)$$

Soit : $F_n(x)=\dfrac{n+1}{2}\big(x-\dfrac{n-1}{n+1}x^{1+\frac{1}{n}}\big)$, ou encore :

$$F_n(x)=\frac{n+1}{2}x\big(1-\frac{n-1}{n+1}x^{\frac{1}{n}}\big)=\frac{n+1}{2}x\big(1-\frac{n-1}{n+1}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{n}}\big)$$

On effectue un développement limité : $\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{n}}=1+\dfrac{\ln x}{n}+o\big(\dfrac{1}{n}\big)$.

On obtient donc :

$F_n(x)=\dfrac{n+1}{2}x\big(1-\dfrac{n-1}{n+1}\big(1+\dfrac{\ln x}{n}+o\big(\dfrac{1}{n}\big)\big)\big)=\dfrac{x}{2}\big(2+\dfrac{n-1}{n}\ln x+o(1)\big)$

et finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = x\big(1 - \frac{\ln x}{2}\big)$$

(conclusion : (Y_n) tend en loi vers X.)

b) On trouve, après calcul, $E(Y_n) = \dfrac{3\left(1+\frac{1}{n}\right)}{4\left(2+\frac{1}{n}\right)}$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} E(Y_n) = \dfrac{3}{8}$.

(comme $E(X) = \dfrac{3}{8}$, on a finalement $\lim\limits_{n\to\infty} E(Y_n) = E(X)$.)

Exercice 4.7.

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit λ et μ deux réels strictement positifs. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} q\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ p\mu \mathrm{e}^{\mu x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont f est une densité.

2. Calculer l'espérance $E(X)$.

3. a) Déterminer p, λ et μ tels que X vérifie : pour tout $x \geqslant 0$,

$$P([X > x]) = P([X < -x]).$$

b) On pose alors $Y = |X|$. Déterminer la loi de Y.

c) A-t-on, pour tout réel s, pour tout réel t tels que $t \geqslant s$,

$$P_{[Y>s]}([Y > t]) = P([Y > t - s])\,?$$

4. Déterminer la fonction de répartition F de X, puis son inverse F^{-1}.

Solution :

1. La fonction f est positive, continue en tout point sauf en 0 et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = p + q = 1$$

2. Des intégrations par parties donnent facilement :

$$E(X) = \frac{q}{\lambda} - \frac{p}{\mu}$$

3. a) Pour $x \geqslant 0$:

$$P(X < -x) = p\,\mathrm{e}^{-\mu x}, P(X > x) = q\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Ainsi $P(X < -x) = P(X > x)$, pour tout $x \geqslant 0$, si et seulement si, pour tout $x \geqslant 0$: $p\,\mathrm{e}^{-\mu x} = q\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$. Ceci n'est possible que si $p = q$ (pour $x = 0$) et $\lambda = \mu$.

b) On sait que $Y(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^+$ et $P(Y \leqslant x) = 0$, pour tout $x < 0$.

Pour $x > 0$, $P(Y \leqslant x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = 1 - 2P(X \geqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

On reconnaît immédiatement, dans la loi de Y, la loi exponentielle de paramètre λ.

c) On sait que la loi exponentielle est une loi sans mémoire. On le redémontre aisément :

$$P_{(Y>s)}(Y > t) = \frac{P(Y > t)}{P(Y > s)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}} = \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} = P(Y > t - s)$$

4. La fonction de répartition de X est :

$$F_X(x) = \begin{cases} p\,\mathrm{e}^{\mu x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ p + q(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu} \ln\left(\dfrac{y}{p}\right) & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant p \\ \dfrac{1}{\lambda} \ln\left(\dfrac{1-y}{q}\right) & \text{si } p \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$