ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

CONCOURS D'ADMISSION 1999

CLASSES PRÉPARATOIRES LITTÉRAIRES

SUJET DE MATHÉMATIQUES

PREMIER PROBLÈME

1. Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$, telle que $f(a) = f(b) = 0$;
   x_0 étant un élément de $]a, b[$, montrer qu'il existe x_1 de $]a, b[$ tel que :
   $$f(x_0) = \frac{f''(x_1)}{2}(x_0 - a)(x_0 - b).$$
   On pourra appliquer plusieurs fois le théorème de ROLLE à la fonction auxiliaire :
   $$\varphi : x \mapsto f(x) - \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}(x - a)(x - b)$$
   après avoir calculé $\varphi(a)$, $\varphi(x_0)$ et $\varphi(b)$.

2. Soit g une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ telle que, pour tout x de $[a, b]$, $m \leqslant g''(x) \leqslant M$.
   a. Soit h l'application définie par :
   $$h(x) = g(x) - g(a) \times \frac{x - b}{a - b} - g(b) \times \frac{x - a}{b - a};$$
   en appliquant le résultat précédent à la fonction h, montrer que, pour tout x de $[a, b]$,
   $$M\frac{(x-a)(x-b)}{2} \leqslant g(x) - g(a) \times \frac{x-b}{a-b} - g(b) \times \frac{x-a}{b-a} \leqslant m\frac{(x-a)(x-b)}{2}.$$
   b. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \left(g(a) \times \frac{x-b}{a-b} + g(b) \times \frac{x-a}{b-a}\right) dx = \frac{b-a}{2}[g(a) + g(b)]$.
   c. En déduire que :
   $$-M\frac{(b-a)^3}{12} \leqslant \int_a^b g(x)\,dx - \frac{b-a}{2}(g(a) + g(b)) \leqslant -m\frac{(b-a)^3}{12}.$$

Tournez la page S.V.P.

3. *a*. Calculer $\int_n^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ pour n entier strictement positif.

b. Utiliser la double inégalité démontrée au 2.*c*. pour montrer que :

$$\frac{1}{12\,(n+1)^2} \leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)[\ln(n+1)-\ln(n)]-1 \leqslant \frac{1}{12\,n^2}.$$

4. On considère les deux suites réelles $(\mathrm{U}_n)_n$ et $(\mathrm{V}_n)_n$ définies pour tout $n \geqslant 2$ par :

$$\mathrm{U}_n = \ln(n^{n+1/2}e^{-n}) - \ln(n!) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n + \frac{1}{12\,(n-1)}.$$

Montrer, en utilisant le résultat établi à la question 3, que les deux suites $(\mathrm{U}_n)_n$ et $(\mathrm{V}_n)_n$ sont adjacentes et qu'elles convergent vers un réel C qui vérifie :

$$\mathrm{C} - \frac{1}{12\,(n-1)} < \mathrm{U}_n < \mathrm{C}.$$

5. On définit la suite $(\mathrm{I}_n)_n$ par la formule $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I_0 et I_1.

b. Vérifier que (I_n) est une suite décroissante.

c. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n ; en déduire les valeurs de I_{2n} puis de I_{2n+1}.

6. Démontrer, en utilisant la double inégalité $\mathrm{I}_{2n-1} > \mathrm{I}_{2n} > \mathrm{I}_{2n+1}$, que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2\,n} = \pi.$$

En déduire que $\mathrm{C} = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

Remarque importante : bien que les différentes questions soient dépendantes, on pourra utiliser un résultat énoncé, mais non démontré, pour la suite du problème.

SECOND PROBLÈME

Une société d'envergure nationale qui commercialise « clés en mains » des ordinateurs propose des contrats de maintenance par lesquels elle s'engage à dépanner les entreprises qui le demandent dans l'heure qui suit leur appel téléphonique ; mais il s'est avéré que dans 12 % des cas, elle ne pouvait tenir ce délai, et qu'elle dépannait ses clients avec retard. On admettra que les appels et leur éventuel retard se produisent indépendamment les uns des autres.

Partie I

Une entreprise a appelé le service de dépannage à 10 dates différentes ; on désigne par X le nombre de fois où l'entreprise a subi un retard.

1. Donner la loi de probabilité suivie par X ; préciser son espérance et son écart-type.
2. Calculer à 10^{-4} près la probabilité des événements suivants :
   a. l'entreprise a subi au moins 2 retards ;
   b. l'entreprise a subi moins de 3 retards sachant qu'elle en a subi au moins 1.

Partie II

L'antenne parisienne de la société note les appels successifs qu'elle reçoit avec leurs caractéristiques : nom du client, durée de l'intervention, retard éventuel, ... On désignera par Y_k le rang du k-ième appel qui est traité avec retard ; on définit ainsi une suite de variables aléatoires.

1. On s'intéresse en premier lieu à la loi suivie par Y_1 :
   a. donner la probabilité de l'événement $Y_1 = n$;
   b. calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_1.
2. Traiter les mêmes questions pour la variable aléatoire Y_2.

Partie III

La société pense qu'elle aura l'an prochain 1 500 appels pour l'ensemble de la France ; on désigne par Z le nombre d'appels qui seront traités avec retard.

1. Justifier le fait que l'on peut approcher la loi de Z par une loi normale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer alors les probabilités des événements suivants :
   a. $180 < Z < 200$;
   b. $Z < 200$ sachant que $Z > 180$.
3. Déterminer le nombre m tel que la probabilité que Z fasse partie de l'intervalle $[180 - m\,;\,180 + m]$ soit 0,95.

Partie IV

Après avoir réorganisé ses équipes de dépannage, la société veut contrôler une éventuelle amélioration en interrogeant par sondage un nombre N_0 de ses clients.

1. En supposant que la fréquence des mécontents est inférieure à 10 %, déterminer le nombre minimal N_0 de clients à interroger pour avoir une incertitude maximale de 3 % sur la fréquence (risque 5 %).
2. La société en a interrogé en réalité 205 ; 18 se sont déclarés mécontents ; donner l'intervalle de confiance au risque 5 % pour la fréquence cherchée.