DL et contre-exemples

* Une fonction est continue si et seulement si elle admet un DL à l’ordre 0.
* Une fonction est dérivable si et seulement si elle admet un DL à l’ordre 1.
* Au delà de l’ordre 2, on ne peut rien conclure sur la régularité de

Voici par exemple une fonction qui admet un DL à l’ordre 2 en 0 mais qui n’est pas 2 fois dérivable en 0 :

).

On démontre facilement avec le théorème des gendarmes que :

)= o(

a donc bien un puisque

En particulier admet un donc est prolongeable par continuité en 0 en posant

De même admet un donc est dérivable en 0 et

Pourtant )+ )

= ) )

n’existe pas ainsi n’est pas prolongeable par continuité en 0 donc pas dérivable : n’existe pas alors que a un !

* On peut intégrer un DL mais on ne peut pas le dériver. Voici une fonction qui admet un dont la dérivée n’admet pas de

On démontre facilement avec le théorème des gendarmes que :

)= o( ainsi admet un ) puisque

Mais

n’est pas continue en 0 donc n’admet pas de

Remarque : La fonction précédemment choisie donne aussi un contre-exemple pour justifier qu’on ne peut pas dériver un DL. On peut aussi considérer

La fonction h est dérivable en 0 car elle admet ) : o(), pourtant sa dérivée n’est pas continue en 0, h’ n’a donc pas de

Cf exercice 8 du TD13