Corrigé du devoir maison n°12

Pour justifier que f est prolongeable par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable en 0 et étudier la position relative de la courbe du prolongement de f et sa tangente en 0, il nous faut écrire le DL d'ordre au moins 2 de f en 0.

On sait que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ alors $\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} = \frac{1}{x(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4))}$

On sait que $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$ ainsi par composition des DL, en posant u $= \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o(x^4)$, on a :

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + (\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120})^2 + o(x^4)\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + (\frac{x^2}{6})^2 + o(x^4)\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)\right)$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + o(x^3)$$

Et par différence : $f(x) = \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + o(x^3)$

Par unicité et identification avec le développement de Taylor Young, on a :

$f(0) = 0; f'(0) = \frac{1}{6}$ et la position relative de la courbe du prolongement de f et sa tangente en 0 est donnée par le signe de $\frac{7x^3}{360}$.

Localement : si $x < 0$ alors la courbe du prolongement de f est sous la tangente en 0
et si $x > 0$ alors la courbe du prolongement de f est au dessus de la tangente en 0.

Il y a un point d'inflexion (la courbe traverse sa tangente en 0).