1 Applications linéaires explicites

1 Pour les applications linéaires suivantes, déterminer la matrice canonique associée, le noyau, l'image et le rang. En déduire si l'application est injective, surjective, bijective.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x - y, x - y)$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (2x + 3y, 3x + y + z)$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x + y, z - x)$.
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (0, 5y - 2z)$
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \longmapsto (x - 2y, x, 5y)$
6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (2x + y, x + y)$

2 Montrer qu'il existe une unique forme linéaire f sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1, 2) = 2$ et $f(-2, 1) = 5$.
Déterminer alors le noyau et l'image de f.

3 Soient les applications linéaires suivantes : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, x + 2y, y) \end{array}$ $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + z, 5x - 2y + z) \end{array}$.

1. Déterminer l'image et le noyau de f et de g.
2. Montrer que $g \circ f \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$. Préciser $(g \circ f)^{-1}$.
3. L'application $f \circ g$ est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

4 Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\varphi(x, y) = (x + y, x + y)$, et soit $f = \varphi + Id_{\mathbb{R}^2}$. Calculer φ^n, puis f^n.

5

1. Soit f l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$ par :
$$f(x, y, z) = (2x + 3y + 5z, x + y + 6z)$$
Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$$f(x, y, z) = (2x + 3y + 5z, x + y + 6z, z)$$
Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

6 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

7 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ associé canoniquement à la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Décomposer le vecteur $u = (1, 1, 1)$ dans $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

2 Raisonnement théorique sur les applications linéaires

8 Soit $E=\mathbb{R}^n$ et soient $f,g\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$f\circ g=0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(g)\subset \mathrm{Ker}(f)$$

9 Soit $E=\mathbb{R}^n$ et soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f\circ f) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$$

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(f\circ f) \Longleftrightarrow E=\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(f)$$

10 Soient f et g deux endomorphismes de $E=\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$g\circ f \text{ injectif } \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(g)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0_E\} \text{ et } \mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$$

$$g\circ f \text{ surjectif } \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(g)+\mathrm{Im}(f)=E \text{ et } \mathrm{Im}(g)=E$$

11 Soit $E=\mathbb{R}^n$ et soit $\varphi\in\mathcal{L}(E)$. On suppose que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont en somme directe.
Montrer que si $x\notin\mathrm{Ker}(\varphi)$, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi^n(x)\neq 0$.

12 Soit $E=\mathbb{R}^n$. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^3=f^2+f+Id_E$.
Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}.

13 Soit $E=\mathbb{R}^n$. On appelle **projecteur dans** E tout endomorphisme $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f\circ f=f$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(f-Id_E)$.
2. Montrer que $E=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

14 Soit $E=\mathbb{R}^n$. On appelle **symétrie dans** E tout endomorphisme $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f\circ f=Id_E$.

1. Montrer que $E=\mathrm{Ker}(f-Id_E)\oplus\mathrm{Ker}(f+Id_E)$.
2. Montrer que $E=\mathrm{Im}(f-Id_E)\oplus\mathrm{Im}(f+Id_E)$.

15 Soit $E=\mathbb{R}^n$ et soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. On suppose qu'il existe $k\geqslant 1$ tel que $f^k=0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f n'est pas un isomorphisme de E.
2. Montrer que Id_E-f et Id_E+f sont des isomorphismes de E.

16 Soit $E=\mathbb{R}^n$.

1. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^2-3f+2Id_E=0$.
   Montrer que : $E=\mathrm{Ker}(f-Id_E)\oplus\mathrm{Ker}(f-2Id_E)$.
2. Soit $g\in\mathcal{L}(E)$ tel que $g+g^3=0$.
   Montrer que $E=\mathrm{Ker}(g)\oplus\mathrm{Im}(g^2)$.
3. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u\circ v\circ u=u$ et $v\circ u\circ v=v$.
   Montrer que : $E=\mathrm{Ker}(u)\oplus\mathrm{Im}(v)$.

17 Soit $E=\mathbb{R}^n$ et soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow f^2=0 \text{ et } n=2\,\mathrm{rg}(f)$$

18 Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que : $\text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.
2. Montrer que : $$\text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0_F\} \\ \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E \end{array} \right.$$

19 Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec $E = \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que : $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leqslant \text{rg}(u+v)$.
2. On suppose que $u \circ v = 0$ et $u + v$ bijectif. Montrer que $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = n$.

20 Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

21 Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}[E)$. Montrer que sont équivalents :

(i) $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$
(ii) $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$
(iii) $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.
(iv) $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.
(v) $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$.

22 Soit $E = \mathbb{R}^3$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f^2)$ et $\text{Ker}(f^2) = \text{Im}(f)$.

23 Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe un $x \neq 0$ tel que $(f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x))$ soit une base de E.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
3. Montrer qu'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que $f^n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

3 Calcul matriciel

24 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Quels produits peut-on calculer entre A, B, C, D ? Les calculer.

25 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n en fonction de n.
2. Soit $B = A - I_2$. Calculer B^n en fonction de n.

26 Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En écrivant $B = I_3 + A$ (où A est à déterminer), calculer B^n en fonction de n pour tout $n \geqslant 3$.

27 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{28}}$ Soient A, B deux matrices carrées d'ordre n telles que le produit AB soit inversible.
Montrer que les matrices A, B et BA sont également inversibles.

$\boxed{\textbf{29}}$ Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A, B et $B-A$ soient inversibles.
Montrer que $A^{-1}-B^{-1}$ est inversible et que $(A^{-1}-B^{-1})^{-1} = B(B-A)^{-1}A$.

$\boxed{\textbf{30}}$ Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer $(M-I)(M+3I)$ où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. En déduire M^2 en fonction de M et I.
3. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.

$\boxed{\textbf{31}}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $M = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^2-(2+x)M+(1+x-2x^2)I_3$.
2. En déduire pour quelles valeurs de x la matrice M est inversible.

$\boxed{\textbf{32}}$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^k = 0$. Montrer que I_n-A est inversible et que $(I_n-A)^{-1} = I_n+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer sa matrice inverse.

$\boxed{\textbf{33}}$ On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Les matrices sont-elles inversibles ? Si oui déterminer leur inverse.

$\boxed{\textbf{34}}$ Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Calculer A^2-A et en déduire que A est inversible et déterminer son inverse par une combinaison linéaire de A et de I.
3. Soit $D = P^{-1}AP$. Vérifier que D est une matrice diagonale.
4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer A^n.