

## 1 Calcul d'intégrales et de primitives

**1** Montrer que  $F : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ .

**2** Déterminer la primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2(x-1)}$  définie sur  $]1, +\infty[$  qui s'annule en 3.

**3** Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_{-2}^4 (x^3 + x - 2) dx$$

$$2. \int_3^{11} \sqrt{2x + 3} dx$$

$$3. \int_2^4 \ln(2t) dt$$

$$4. \int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$$

$$5. \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}} dt$$

$$6. \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}} dt$$

$$7. \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$$

$$8. \int_{-1/3}^0 2^{3x+1} dx$$

$$9. \int_1^e \frac{(\ln t)^\alpha}{t} dt \text{ pour } \alpha > 0.$$

$$10. \int_0^2 |x^3 - x^2 + x - 1| dx$$

$$11. \int_0^5 t|t^2 - 1| dt$$

$$12. \int_0^5 \frac{t-1}{|t^2-2t|+1} dt$$

$$13. \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$14. \int_1^e \ln(t) dt$$

$$15. \int_0^1 \text{Arctan}(t) dt.$$

$$16. \int_0^1 x \text{Arctan}(x) dx.$$

$$17. \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx.$$

$$18. \int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx.$$

$$19. \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^3(x) dx.$$

$$20. \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx.$$

**4** Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n = \int_1^e t^n \ln t dt$  et  $J_n = \int_1^e t^n (\ln t)^2 dt$ .

**5** Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_2^3 \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$2. \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t(t-1)} dt$$

$$3. \int_1^2 \frac{3t+1}{t(t+1)} dt$$

$$4. \int_0^1 \frac{1}{(t-2)(t+3)} dt$$

$$5. \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)(t+2)} dt$$

$$6. \int_{-1}^0 \frac{t^2}{t^2+4t-5} dt$$

**6** Calculer les intégrales suivantes avec le changement de variable indiqué.

$$1. \int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} dx \quad (u = \sqrt{e^x - 1})$$

$$2. \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt \quad (x = t+1)$$

$$3. \int_1^{4/3} \frac{t^2}{(3t-2)^5} dt \quad (u = 3t-2)$$

$$4. \int_1^2 \frac{e^{2t}}{1-e^t} dt \quad (t = \ln(x))$$

$$5. \int_0^1 \frac{\sqrt{t}-t}{\sqrt{t}+1} dt \quad (x = \sqrt{t})$$

$$6. \int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt \quad (t = x^2)$$

$$7. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)} \quad (u = \cos(t))$$

$$8. \int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos(t)} \quad (x = \sin(t))$$

$$9. \int_1^2 \frac{1}{t(t^3+1)} dt \quad (u = t^3)$$

$$10. \int_1^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt \quad (t = x^2)$$

$$11. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x) \sin(x)} dx \quad (u = \sin(x))$$

$$12. \int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx \quad (x = \sqrt{t})$$

## 2 Suites d'intégrales

**7** On note pour  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $I(p, q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$ .

1. Calculer  $I(0, q)$  et  $I(p, 0)$  pour  $p, q \in \mathbb{N}$ .
2. Pour  $p, q \in \mathbb{N}$ , exprimer  $I(p+1, q)$  en fonction de  $I(p, q+1)$ .
3. Calculer  $I(p, q)$  en fonction de  $p$  et  $q$ .

**8** On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$ .

1. La suite  $(I_n)$  est-elle monotone ?
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$
3. Montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,  $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$ .
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

**9** On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$ .

1. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante. Est-elle minorée ?
2. Montrer que sur  $[1, e]$ ,  $0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}$ . En déduire un encadrement de  $I_n$ .
3. Montrer que :  $\forall n \geq 1$ ,  $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$ .

**10** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$ .

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
2. Déterminer une relation entre  $I_n$  et  $I_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .  
En déduire la valeur de  $I_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

**11** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ .

1. Etablir une relation entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ . En déduire la valeur de  $I_n$ .
2. Calculer alors  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**12** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq \ln(2)$ .
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$ .
3. En déduire un encadrement de  $u_n$ .

### 3 Fonctions définies par des intégrales

**13** Soit  $F$  la fonction définie par  $F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$

- Déterminer le domaine de définition de la fonction  $F$  et montrer que  $F$  est dérivable sur son domaine de définition. Calculer sa dérivée.
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $F(x) \leq 0$ .
- Montrer que  $F$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq e|x|$ .
- Etudier la parité de la fonction  $F$ .

**14** Pour chacune des fonctions suivantes, donner :

- le domaine de définition de  $f$
- le signe de  $f$  sur le domaine de définition,
- la parité éventuelle
- la dérivée de  $f$  si elle existe

$$1. f : x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$$

$$2. f : x \mapsto \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$$

$$3. f : x \mapsto \int_0^x |t| dt$$

$$4. f : x \mapsto \int_1^x |t|^3 dt$$

$$5. f : x \mapsto \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1} dt$$

$$6. f : x \mapsto \int_x^0 \sqrt{1 + t^2} dt$$

$$7. f : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1 - t^4}$$

$$8. f : x \mapsto \int_1^x e^{-t^2} dt$$

$$9. f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

**15** Soit  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ .

- Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et calculer sa dérivée.
- En remarquant que  $\ln(2) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$  pour tout réel  $x > 0$ , montrer que  $f$  admet  $\ln(2)$  pour limite en 0.
- Montrer que  $f$  peut se prolonger en une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ .
-  tudier les variations de  $f$ .  tudier le signe de  $f(x)$  sur le domaine de définition de  $f$ .
- Tracer l'allure de la courbe de  $f$ .

**16** On pose  $g(x) = (2x - 1) \int_{1/2}^x \frac{t^4 dt}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$ .

- Déterminer le domaine de définition de la fonction  $g$ .
- Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$ .
- Résoudre l'équation  $g(x) = 0$ .

**17** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- $f$  est-elle paire ? impaire ?
- Démontrer que pour  $x \neq 0$ , on a  $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$ .
- En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .