

1 Calculs de dérivées, étude de fonctions

1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$.

Montrer que f réalise une bijection de $[\sqrt{e}, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

2 Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Montrer que si f est paire, alors sa dérivée est impaire.

Montrer que si f est impaire, alors sa dérivée est paire.

3 Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.

2. $\forall x \in]-1, +\infty[, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

5. $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 2\sin(x) + \tan(x) \geq 3x$

4 Montrer que pour $u > 0$ et $v \in \mathbb{R} : uv \leq u \ln(u) + e^{v-1}$.

5 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

6 Montrer que la fonction $f : x \mapsto 2\text{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \text{Arctan}(x)$ est constante sur \mathbb{R} et déterminer sa valeur.

7 Soit f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

8 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2+3\ln(x)}{1-\ln(x)}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2. Déterminer $f^{-1}(-4)$. Justifier que f^{-1} est dérivable en -4 et calculer $(f^{-1})'(-4)$.

9 Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par : $f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1[$ vers un intervalle J à déterminer.

2. Déterminer $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$. Justifier que f^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)$.

10 La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?

11 En reconnaissant des taux d'accroissements, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(x)}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{2x}$

2 Équivalents usuels en 0

12 Calculer les limites des expressions suivantes aux valeurs indiquées.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$ en 0 2. $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en 0 3. $\frac{\ln(x-1)}{x-2}$ en 2 4. $\frac{\ln(2+x) - \ln(2)}{\exp(\sqrt{1+x}) - e}$ en 0 5. $\frac{x-1}{x^n - 1}$ en 1 ($n \in \mathbb{N}^*$) | 6. $\frac{\ln(4x^2 - 2x + 1)}{x}$ en 0 et $+\infty$ 7. $\frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1})}$ en 1^+ 8. $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$ 9. $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{e^x - 1}$ en 0 10. $\frac{\ln(2-x^2)}{x-1}$ en 1 11. $(1+x^2)^{\ln(x)/x}$ en 0^+ | 12. $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ en $+\infty$ 13. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2/2}$ en $+\infty$ et $-\infty$ 14. $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x/2}$ en $+\infty$ 15. $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)}$ en 1^+ et $+\infty$ 16. $\frac{\ln(x+1)}{e^x - \sqrt{1+x}}$ en 0 |
|---|---|---|

3 Utilisation des Accroissements Finis

13 Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{y} \ln\left(\frac{x+y}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.

14 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|1 - \cos(x)| \leq |x|$.

15 Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $|\tan(x)| \geq |x|$.

16 Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

1. Montrer que h est de classe \mathcal{C}^1 sur son domaine de définition.
2. Démontrer que h admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0, 1]$
3. Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

17 1. Montrer que l'équation $e^x = 3 + 2x$, d'inconnue $x \in]-\infty, 0]$ admet une unique solution α dans $] -\infty, 0]$, puis justifier que $-2 \leq \alpha \leq -1$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $\left|\frac{e^x - 3}{2} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

4 Exercices plus théoriques

18 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f'(a) = 0$, que $f(b) > 0$ et que $f'(b) < 0$. Montrer que f' s'annule sur $]a, b[$.

19 Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

20 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $e^{-a}f(a) = e^{-b}f(b)$. Montrer qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = f(c)$.

21 Soit f une fonction deux-fois dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que : $\forall x \geq 0$, $f''(x) - f(x) \geq 0$ et $f(0) = f'(0) = 0$. Étudier $g : x \mapsto e^x(f'(x) - f(x))$. En déduire que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$.