# 1 Complexes : forme algébrique

$\boxed{1}$ Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z_1 = (3+2i)(5+i)-(2-i)(1+i)$
2. $z_2 = \dfrac{1}{1+i} - 1$
3. $z_3 = i^n$ $(n \in \mathbb{N})$,
4. $z_4 = \dfrac{(2+i)^2}{1-3i}$
5. $z_5 = (i-\sqrt{2})^3$
6. $z_6 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{i+1} - 1}$

$\boxed{2}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue $z$ :

1. $iz - 3 = z + 2i + (3i+1)z$
2. $z^2 + 4 = 0$
3. $z^2 - 4z + 13 = 0$
4. $z^2 - 2z + 5 = 0$
5. $z^2 - \sqrt{2}z + \frac{1}{2} = 0$
6. $4z^2 + 4z + 101 = 0$
7. $z^2 + 2z - 80 = 0$
8. $2z^4 - 5z^2 - 12 = 0$
9. $3iz + (1+i)\overline{z} + 1 = -8(1+i)$
10. $3z\overline{z} + 2iz = \dfrac{7}{4} + i$
11. $(z+1)^3 = z^3$
12. $(2z+1)^3 = (z-1)^3$

$\boxed{3}$ Soit $a$ un réel strictement positif. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = a$
2. $z^2 = -a$
3. $z^2 = ia$
4. $z^2 = -ia$
5. $z^2 = -a^2$
6. $z^2 = ia^2$

# 2 Trigonométrie élémentaire

$\boxed{4}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, et placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions :

1. $\cos(x) = 0$
2. $\sqrt{2}\cos(x) = -1$
3. $\sin(x) = -1/2$
4. $\sin(x) = 1.$
5. $\cos(3x) = -1/2$
6. $\cos(x+1) = \cos(2x-1)$
7. $2\sin^2(x) - 7\sin(x) + 3 = 0.$
8. $\cos^2(x) = 3/4$
9. $\cos^2(x) = \cos^4(x)$
10. $\cos(x) = \sin(x)$
11. $\cos(x) = -\sin(x)$
12. $\sin(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$\boxed{5}$ Soit $x$ un réel tel que $\tan(x) = \sqrt{5}$ et $\cos(x) < 0$. Calculer $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

$\boxed{6}$ En remarquant que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$, calculer $\cos\dfrac{5\pi}{12}$, $\sin\dfrac{5\pi}{12}$, $\tan\dfrac{5\pi}{12}$. En déduire $\cos\dfrac{7\pi}{12}$, $\sin\dfrac{7\pi}{12}$, $\tan\dfrac{7\pi}{12}$.

$\boxed{7}$ En remarquant que $3x = x + 2x$, exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.

$\boxed{8}$ Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$. En déduire $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

# 3 Complexes : forme exponentielle

**9** Déterminer le module et un argument des complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i$
2. $z_2 = 1 - i$
3. $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$
4. $z_4 = -2$
5. $z_5 = -\sqrt{2}i$
6. $z_6 = (1 + \sqrt{3}i)^5$

**10** Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer le module de $z_1 = t^2 + 2it - 1$ et de $z_2 = \dfrac{1+it}{1-it}$, simplifiés au maximum.

**11** Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Mettre les complexes $z_1 = e^{i\theta} + 1$ et $z_2 = 1 - e^{i\theta}$ sous forme exponentielle.

**12** En remarquant que $z = z' \iff \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \\ |z| = |z'| \end{cases}$, résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ en cherchant les solutions sous forme algébrique.

1. $z^2 = 8 - 6i$
2. $z^2 = 2 - 3i\sqrt{5}$

**13** Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ en cherchant les solutions sous forme exponentielle.

1. $z^3 = i$
2. $z^3 = 4\sqrt{2}(1 - i)$
3. $z^5 = 4 + 4i$
4. $z^6 + 64 = 0$
5. $z^n = 1$ (pour $n$ entier, $n \geqslant 2$)

# 4 Complexes et trigonométrie

**14** Démontrer les formules suivantes pour tous réels $a$ et $b$.

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad \cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad \sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

**15** Démontrer que pour tous réels $a$ et $b$ : $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$.
De même, exprimer $\sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$.

**16** En utilisant la Formule de Moivre, exprimer $\cos(2x)$, $\cos(3x)$ et $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

**17** Linéariser : $\sin^2(x)$, $\cos^3(x)$, $\sin^4(x)$, $\sin^2(x)\cos^2(x)$.

**18** Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \qquad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx), \qquad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$