1 Suites récurrentes et formules explicites

1 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.
Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n.

2 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$.
Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n.

3 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2^n$.
Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n.

4 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{n}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$. La suite (u_n) est-elle majorée ?
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $n+2 \leqslant 2^n$. La suite (u_n) est-elle minorée ?

5 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 4,\ u_1 = 8,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$.

6 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 4,\ u_1 = \dfrac{7}{3},$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{7}{6}u_{n+1} - \dfrac{1}{3}u_n$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$.

7 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = u_1 = 1,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $n \leqslant u_n$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_n < \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$.

8 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2, u_1 = -1,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+3}{n+2}u_{n+1} - \dfrac{u_n}{n+2}$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 5 - 3\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$.

9 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant n!$.

2 Raisonnements par récurrence

10 Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 5^n \geqslant 2^n + 3^n$.

11 Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

12 Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \geqslant n+1$.

3 Sommes et produits

13 Soit $n \geqslant 5$. Compléter les trous dans les égalités suivantes :

$$\sum_{k=3}^{n} u_{k+2} = \sum_{k=\bullet}^{\bullet} u_k, \qquad \sum_{k=4}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{\bullet} u_\bullet, \qquad \sum_{k=3}^{n+2} u_{k+1} = \sum_{k=\bullet}^{n} u_\bullet$$

14 Simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1} - u_k), \qquad \sum_{k=p-3}^{q-1}(u_{k+1} - u_{k-1})$$

15 Calculer pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

16 Calculer les sommes et produits suivants pour $n \geqslant 2$:

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 1$
4. $\displaystyle\prod_{k=5}^{45} \frac{k}{k+1}$
5. $\displaystyle\prod_{k=29}^{79} \frac{2k+1}{2k-1}$
6. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

17 Calculer les sommes et produits suivants pour $n \geqslant 2$:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k!$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$
6. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(x^{2\times 3^k} + x^{3^k} + 1\right)$

18 Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)$$

19 Déterminer deux réels α et β tels que :

$$\forall t > 1, \qquad \frac{1}{t^2-1}=\frac{\alpha}{t-1}+\frac{\beta}{t+1}$$

En déduire la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$.

20 Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

21 Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \prod_{k=1}^{n}(n+k)=2^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$$

22 En utilisant les relations de Chasles, calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n), \qquad \sum_{k=0}^{2n}\max(k,n)$$

4 Sommes classiques

23 Calculer les sommes suivantes pour $n \geqslant 2$:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}2^k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}5^{-k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{3k-2}}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3^{n+k}}{2^k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}$
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}2^{2k}$
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}(-1)^k3^{k-1}$
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$
13. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{2+4^{n+k}}{2^k}$
14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k^2-2k)$
15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2$
16. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}3^k$
17. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}2^k$
18. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}3^{k-1}2^{n-k}$
19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}(-1)^k3^{k+1}$
20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n+1}{k}2^k$
21. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$
22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k2^{k-1}$.
23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}3^{n-k+1}\binom{n}{k}$.

5 Coefficients binomiaux

24 Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $k > p$, $\displaystyle\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.

En déduire que pour $n \geqslant p$, on a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Application : Calculer $\displaystyle\sum_{k=4}^{20}k(k-1)(k-2)(k-3)$.

25 Soient n et p deux entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

Montrer que pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant p$, on a : $\displaystyle\binom{n}{j}\binom{n-j}{p-j} = \binom{n}{p}\binom{p}{j}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{p-j}$

6 Sommes doubles

26 Calculer les sommes doubles suivantes pour $n \geqslant 2$:

1. $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{2i-j}$.
2. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$.
3. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$.
4. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} i$.
5. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} (i+j)$.
6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

27 Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} 2^k$, puis calculer cette somme.

28 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad v_n = b_{n+1} - b_n$$

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = u_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k v_k$.
2. Application : calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k k$.

29 Montrer que pour $N \geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=n+1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$.

30 On note pour $n \geqslant 2$: $V = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$, $\quad W = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} ij$, $\quad X = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$, $\quad Y = \displaystyle\prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} ij$, $\quad Z = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i<j \leqslant n} ij$.
Calculer V. En déduire W. Exprimer W en fonction de X et Y.
Montrer, sans calcul, que $X = Y$. En déduire X puis Z.

7 Suites usuelles

31 On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$.

1. Montrer par récurrence sur n que u_n existe et $1 \leqslant u_n < 2$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{1}{u_n-2}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.

32 On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{4-u_n}$.

1. Montrer par récurrence sur n que u_n existe et $1 < u_n < 3$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-3}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.

33 Calculer le terme général des suites (u_n) suivantes :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 4$.
2. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3v_n + 4$.
3. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

8 Pour aller plus loin

34 On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n - 1. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - n$.
2. (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}-1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}.$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}}.$$
   (c) Calculer finalement la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$ en fonction de n.

35 On souhaite montrer que pour tous entiers p, n tels que $0 \leqslant p \leqslant n-1$:

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^p\binom{n-1}{p}$$

1. Démontrer la formule en utilisant plusieurs fois la relation de Pascal : $\binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} - \binom{n-1}{p-1}$.
2. Démontrer la formule par récurrence sur n.
3. Démontrer la formule par récurrence sur p.
   (Rappel : par convention, on pose que si $p \geqslant n$, $\binom{n-1}{p} = 0$).

36 Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2a_n + 2^n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = n2^{n-1}$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$$
3. Rappeler la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} 2^k$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

37

1. Soit p un entier fixé, tel que $p \geqslant 1$. Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant p$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $k^4 = 24\binom{k+2}{4} - 2k^3 + k^2 + 2k$.
3. Soit $n \geqslant 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k^3$.
4. Montrer pour $n \geqslant 2$, on a :
$$\sum_{k=2}^{n}\binom{k+2}{4} = \binom{n+3}{5}$$
5. En déduire que pour $n \geqslant 2$:
$$\sum_{k=2}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30} - 1$$

38 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}.$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
3. (a) Vérifier que pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n(u_{n+1} + u_n)}.$$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
   (c) Calculer pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$ et en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}.$$
   (d) Rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant 2.$$
4. On définit une suite (v_n) par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n^2.$$
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de n.
   (b) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$ de deux manières différentes.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.