20.1 Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et si oui, calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+2^n}{n!}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{1/n}}{n^2}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+3}{n!}a^n$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n!}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+3n}{2^n}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

20.2 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
3. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$
4. $u_n = 2^{2n-1}e^{-n}$
5. $u_n = \left(e^{1/n}-1\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
6. $u_n = (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$
7. $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$

20.3 À l'aide de comparaisons série-intégrale, déterminer les natures des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{n^2}{e^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2(n)}$.

20.4 Soit (u_n) définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$, puis que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme.

20.5 Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).
3. On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$.
4. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

20.6 Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.

1. Etudier la monotonie de cette suite et déterminer sa limite éventuelle.
2. Etudier la nature des séries suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$
   (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$
   (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{u_n}$
   (d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{1+u_n}$
   (e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n^2$
3. On souhaite étudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$.
   (a) Soit S_n la somme partielle au rang n. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont des suites adjacentes.
   (b) Conclure sur la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.