

**1** Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :  $u_1 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$ .  
Conjecturer puis démontrer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

On calcule les premiers termes :

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = \frac{2}{3}, \quad u_4 = \frac{3}{4}$$

On peut donc conjecturer que, pour tout entier  $k \geq 1$ , on aurait peut-être  $u_k = \frac{k-1}{k}$ .

Notons, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{P}(n) : \ll u_n = \frac{n-1}{n} \gg$ .

- D'après la première valeur de la suite,  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 1$  fixé. Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait  $\mathcal{P}(n)$  vraie, i.e.  $u_n = \frac{n-1}{n}$ .

Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, i.e. montrons que  $u_{n+1} = \frac{n}{n+1}$ .

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \stackrel{HR}{=} \frac{1}{2 - \left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{1}{\frac{2n - (n-1)}{n}} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}.$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- Par récurrence :  $\forall n \geq 1$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

**2** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par :  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$ .

Conjecturer puis démontrer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

On calcule les premiers termes :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 4$$

On peut donc conjecturer que, pour tout entier  $k \geq 0$ , on aurait peut-être  $u_k = k + 1$ .

Notons, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n = n + 1$  ».

- D'après la première valeur de la suite,  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$  fixé. Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait  $\mathcal{P}(n)$  vraie, i.e.  $u_n = n + 1$ .  
Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie, i.e. montrons que  $u_{n+1} = n + 2$ .

$$u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8 \stackrel{HR}{=} 10(n + 1) - 9n - 8 = n + 2$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie.

- Par récurrence :  $\forall n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

**3** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par :  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2^n$ .

Conjecturer puis démontrer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

On calcule les premiers termes :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 7, \quad u_4 = 15, \quad u_5 = 31$$

On peut donc conjecturer que, pour tout entier  $k \geq 0$ , on aurait peut-être  $u_k = 2^k - 1$ .

Notons, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n = 2^n - 1$  ».

- D'après la première valeur de la suite,  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$  fixé. Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait  $\mathcal{P}(n)$  vraie, i.e.  $u_n = 2^n - 1$ .  
Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, i.e. montrons que  $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ .

$$u_{n+1} = u_n + 2^n \stackrel{HR}{=} (2^n - 1) + 2^n = 2 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- Par récurrence :  $\forall n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

4 Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par :  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_{n-1} + \frac{n}{2^n}$ .

1. Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $u_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ . La suite  $(u_n)$  est-elle majorée ?
2. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $n+2 \leq 2^n$ . La suite  $(u_n)$  est-elle minorée ?

1. Montrons l'égalité par récurrence.

Notons, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$  ».

- On sait que  $u_0 = 0$  et par ailleurs  $2 - \frac{0+2}{2^0} = 0$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$  fixé. Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait  $\mathcal{P}(n)$  vraie, i.e.  $u_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ .

Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, i.e. montrons que  $u_{n+1} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &\stackrel{HR}{=} \left( 2 - \frac{n+2}{2^n} \right) + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-(n+2)}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-2(n+2) + (n+1)}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-n-3}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- Par récurrence :  $\forall n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

Finalement, avec le résultat précédent, on voit donc que :

$$\forall n \geq 0, u_n \leq 2$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est majorée (par 2).

2. De même, montrons l'inégalité proposée par récurrence.

Notons, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{Q}(n)$  : «  $n+2 \leq 2^n$  ».

- Pour  $n = 2$ ,  $\mathcal{Q}(2)$  : «  $4 \leq 2^2$  » est clairement vraie.
- Soit  $n \geq 2$  fixé. Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait  $\mathcal{Q}(n)$  vraie, i.e.  $n+2 \leq 2^n$ .

Montrons qu'alors  $\mathcal{Q}(n+1)$  est vraie, i.e. montrons que  $n+3 \leq 2^{n+1}$ .

$$n+3 = (n+2) + 1 \stackrel{HR}{\leq} 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

Ainsi,  $\mathcal{Q}(n+1)$  est vraie.

- Par récurrence :  $\forall n \geq 2$ ,  $\mathcal{Q}(n)$  est vraie.

Avec le résultat précédent, on a donc montré que :

$$\forall n \geq 2, n+2 \leq 2^n \iff \frac{n+2}{2^n} \leq 1 \iff -\frac{n+2}{2^n} \geq -1 \iff 2 - \frac{n+2}{2^n} \geq 1 \iff u_n \geq 1$$

Finalement, la suite  $(u_n)$  est minorée par 1 à partir du rang 2. Comme  $u_0 = 0$  et  $u_1 = \frac{1}{2}$  la suite est bien minorée (par 0).

**5** Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 4$ ,  $u_1 = 8$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$ .

Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$ .

On raisonne avec une récurrence double.

Notons pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$  ».

- $n = 0$ . On a  $u_0 = 4$ , et  $2 \times (-1)^0 + 2 \times 5^0 = 4$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- $n = 1$ . On a  $u_1 = 8$ , et  $2 \times (-1)^1 + 2 \times 5^1 = -2 + 10 = 8$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que les propriétés  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  soient vraies pour cet entier  $n$  : on a  $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$  et  $u_{n+1} = 2 \times (-1)^{n+1} + 2 \times 5^{n+1}$ . Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie également, c'est-à-dire montrons que  $u_{n+2} = 2 \times (-1)^{n+2} + 2 \times 5^{n+2}$ .

$$\begin{aligned}
 u_{n+2} &= 4u_{n+1} + 5u_n \\
 &\stackrel{HR}{=} 4(2 \times (-1)^{n+1} + 2 \times 5^{n+1}) + 5(2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n) \\
 &= 8 \times (-1)^{n+1} + 8 \times 5^{n+1} + 10 \times (-1)^n + 2 \times 5^{n+1} \\
 &= (10 - 8) \times (-1)^n + (8 + 2) \times 5^{n+1} \\
 &= 2 \times (-1)^{n+2} + 2 \times 5^{n+2}
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie.

- Par récurrence double,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

**6** Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 4$ ,  $u_1 = \frac{7}{3}$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ .

Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2^{n+1}}{3^n}$ .

On raisonne avec une récurrence double.

Notons pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2^{n+1}}{3^n}$  ».

- $n = 0$ . On a  $u_0 = 4$ , et  $\frac{1}{2^{-1}} + \frac{2^1}{3^0} = 2 + 2 = 4$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- $n = 1$ . On a  $u_1 = 7/3$ , et  $\frac{1}{2^0} + \frac{2^{1+1}}{3^1} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que les propriétés  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  soient vraies pour cet entier  $n$  : on a  $u_n = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2^{n+1}}{3^n}$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2^n} + \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}$ . Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie également, c'est-à-dire montrons que  $u_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2^{n+3}}{3^{n+2}}$ .

$$\begin{aligned}
 u_{n+2} &= \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \\
 &\stackrel{HR}{=} \frac{7}{6} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2^{n+1}}{3^n} \right) \\
 &= \frac{7}{3} \times \frac{1}{2^{n+1}} + 7 \times \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \\
 &= \left( \frac{7}{3 \times 4} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2^{n-1}} + \left( \frac{7}{3} - 1 \right) \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{4}{3} \times \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2^{n+3}}{3^{n+2}}
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie.

- Par récurrence double,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

**7** Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = u_1 = 1$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ .

1. Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$ , on a :  $n \leq u_n$ .
2. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $u_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ .

1. On raisonne avec une récurrence double.

Notons pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $n \leq u_n$  ».

- $0 \leq 1 = u_0$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- $1 \leq 1 = u_1$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 1$ . Supposons que les propriétés  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  soient vraies pour cet entier  $n$  : on a  $n \leq u_n$  et  $n+1 \leq u_{n+1}$ . Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie également, c'est-à-dire montrons que  $n+2 \leq u_{n+2}$ .

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geq (n+1) + (n) \geq n+1+1 = n+2$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie.

- Par récurrence double,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

2. Ici encore, faisons une récurrence double. Notons pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{Q}(n)$  : «  $u_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$  ».

- $u_1 = 1 < \frac{7}{4}$ , donc  $\mathcal{Q}(1)$  est vraie.
- $u_2 = 2 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$ , donc  $\mathcal{Q}(2)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 1$ . Supposons que les propriétés  $\mathcal{Q}(n)$  et  $\mathcal{Q}(n+1)$  soient vraies pour cet entier  $n$  : on a  $u_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$  et  $u_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$ . Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie également, c'est-à-dire montrons que  $u_{n+2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$ .

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} = \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(\frac{7}{4} + 1\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$$

Ainsi,  $\mathcal{Q}(n+2)$  est vraie.

- Par récurrence double,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{Q}(n)$  est vraie.

8 Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 2, u_1 = -1$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{n+3}{n+2}u_{n+1} - \frac{u_n}{n+2}$ .

Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n = 5 - 3 \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$ .

On raisonne avec une récurrence double.

Notons pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n) : \ll u_n = 5 - 3 \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \gg$ .

- On a  $u_0 = 2$ , et  $5 - 3 \times \frac{1}{0!} = 5 - 3 = 2$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.  
On a  $u_1 = -1$ , et  $5 - 3 \left( \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \right) = 5 - 3 \times 2 = -1$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que les propriétés  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  soient vraies pour cet entier  $n$  : on a  $u_n = 5 - 3 \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$  et  $u_{n+1} = 5 - 3 \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!}$ . Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie également, c'est-à-dire montrons que  $u_{n+2} = 5 - 3 \sum_{i=0}^{n+2} \frac{1}{i!}$ .

$$\begin{aligned}
 u_{n+2} &= \frac{n+3}{n+2}u_{n+1} - \frac{u_n}{n+2} \\
 &\stackrel{HR}{=} \frac{n+3}{n+2} \left( 5 - 3 \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!} \right) - \frac{1}{n+2} \left( 5 - 3 \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \right) \\
 &= 5 \left( \frac{n+3}{n+2} - \frac{1}{n+2} \right) - 3 \left( \frac{n+3}{n+2} \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!} - \frac{1}{n+2} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \right) \\
 &= 5 \times \frac{n+2}{n+2} - 3 \left( \left( 1 + \frac{1}{n+2} \right) \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!} - \frac{1}{n+2} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \right) \\
 &= 5 - 3 \left( \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!} + \frac{1}{n+2} \left( \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \right) \right) \\
 &= 5 - 3 \left( \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!} + \frac{1}{n+2} \times \frac{1}{(n+1)!} \right) \\
 &= 5 - 3 \sum_{i=0}^{n+2} \frac{1}{i!}
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie.

- Par récurrence double,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.



9 Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 1$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$ .

Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n \leq n!$ .

On raisonne avec une récurrence forte.

Notons pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n) : \ll u_n \leq n! \gg$ .

- On a  $u_0 = 1 \leq 0! = 1$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait :  $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$  qui soient vraies. On a donc par hypothèse :

$$u_0 \leq 0!, \quad u_1 \leq 1!, \quad \dots, \quad u_n \leq n!$$

Montrons alors que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

On a :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n k!$$

Mais, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $k! \leq n!$ , on a donc :

$$u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n k! \leq \sum_{k=0}^n n! = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- Par récurrence forte,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

**10** Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $5^n \geq 2^n + 3^n$ .

Notons pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathcal{P}(n) : \ll 5^n \geq 2^n + 3^n \gg$$

- Pour  $n = 1$ , on a bien  $5 \geq 2 + 3$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 1$ . Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait  $\mathcal{P}(n)$  vraie, i.e.  $5^n \geq 2^n + 3^n$ .  
Montrons qu'alors on a  $\mathcal{P}(n+1)$  vraie, i.e. montrons que  $5^{n+1} \geq 2^{n+1} + 3^{n+1}$ .

$$5^{n+1} = 5 \times 5^n \stackrel{HR}{\geq} 5(2^n + 3^n) = 5 \times 2^n + 5 \times 3^n \geq 2 \times 2^n + 3 \times 3^n = 2^{n+1} + 3^{n+1}$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- Par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

**11** Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$ .

Notons pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathcal{P}(n) : \ll \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2 \gg$$

- Pour  $n = 1$ , on a  $\sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 1 = 1^2$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 1$ . Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait  $\mathcal{P}(n)$  vraie, i.e.  $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$ .

Montrons qu'alors on a  $\mathcal{P}(n + 1)$  vraie, i.e. montrons que  $\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n + 1)^2$ .

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) + (2(n + 1) - 1) \stackrel{HR}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Donc  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie.

- Par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

*Remarque* : on peut aussi démontrer le résultat sans récurrence, on calculant directement la somme :

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2 \times \frac{n(n + 1)}{2} - n = n(n + 1) - n = n^2$$

**12** Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n + 1$ .

Notons, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $2^n \geq n + 1$  ».

- Pour  $n = 0$ ,  $2^0 \geq 0 + 1$  est bien vraie, donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$  fixé. Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait  $\mathcal{P}(n)$  vraie, i.e.  $2^n \geq n + 1$ .  
Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie, i.e. montrons que  $2^{n+1} \geq n + 2$ .

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \stackrel{HR}{\geq} 2 \times (n + 1) = 2n + 2 \geq n + 2$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie.

- Par récurrence :  $\forall n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

**13** Soit  $n \geq 5$ . Compléter les trous dans les égalités suivantes :

$$\sum_{k=3}^n u_{k+2} = \sum_{k=\bullet}^{\bullet} u_k, \quad \sum_{k=4}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{\bullet} u_{\bullet}, \quad \sum_{k=3}^{n+2} u_{k+1} = \sum_{k=\bullet}^n u_{\bullet}$$

$$\sum_{k=3}^n u_{k+2} = \sum_{k=5}^{n+2} u_k$$

$$\sum_{k=4}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{n-4} u_{k+3}$$

$$\sum_{k=3}^{n+2} u_{k+1} = \sum_{k=1}^n u_{k+3}$$

14 Simplifier les sommes suivantes :

$$\sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k), \quad \sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

$$\sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$$

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_q + u_{q-1} - u_{p-3} - u_{p-4}$$

**15** Calculer pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

**16** Calculer les sommes et produits suivants pour  $n \geq 2$  :

$$1. \prod_{k=0}^n 2$$

$$3. \sum_{k=n}^{2n} 1$$

$$5. \prod_{k=29}^{79} \frac{2k+1}{2k-1}$$

$$2. \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$4. \prod_{k=5}^{45} \frac{k}{k+1}$$

$$6. \prod_{k=2}^n \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right).$$

$$1. \prod_{k=0}^n 2 = 2^{n+1}$$

$$2. \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

$$3. \sum_{k=n}^{2n} 1 = (2n) - (n) + 1 = n + 1$$

$$4. \prod_{k=5}^{45} \frac{k}{k+1} = \frac{5}{46}$$

$$5. \prod_{k=29}^{79} \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{159}{57}$$

$$6. \prod_{k=2}^n \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \left( \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \right) \times \left( \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} \right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$



**17** Calculer les sommes et produits suivants pour  $n \geq 2$  :

$$1. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$3. \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

$$5. \prod_{k=1}^n 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$$

$$2. \sum_{k=1}^n k.k!$$

$$4. \sum_{k=2}^n \ln \left( \frac{k^2 - 1}{k^2} \right)$$

$$6. \prod_{k=0}^n \left( x^{2 \times 3^k} + x^{3^k} + 1 \right)$$

$$1. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$2. \sum_{k=1}^n k.k! = \sum_{k=1}^n ((k+1) - 1)k! = \sum_{k=1}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$$

$$3. \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

$$4. \sum_{k=2}^n \ln \left( \frac{k^2 - 1}{k^2} \right) = \ln \left( \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} \right) = \ln \left( \frac{n+1}{2n} \right)$$

$$5. \prod_{k=1}^n 2^{\frac{1}{k(k+1)}} = 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}} = 2^{1 - \frac{1}{n+1}}.$$

$$6. \prod_{k=0}^n \left( x^{2 \times 3^k} + x^{3^k} + 1 \right) = \prod_{k=0}^n \left( \sum_{j=0}^2 (x^{3^k})^j \right).$$

Si  $x \neq 1$ , on a :

$$\prod_{k=0}^n \left( \sum_{j=0}^2 (x^{3^k})^j \right) = \prod_{k=0}^n \frac{1 - (x^{3^k})^3}{1 - x^{3^k}} = \prod_{k=0}^n \frac{1 - x^{3^{k+1}}}{1 - x^{3^k}} = \frac{1 - x^{3^{n+1}}}{1 - x}$$

Si  $x = 1$ , on a :

$$\prod_{k=0}^n \left( \sum_{j=0}^2 (x^{3^k})^j \right) = \prod_{k=0}^n 3 = 3^{n+1}$$

**18** Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$$

Avec un changement d'indice  $j = n + 1 - k$  dans la deuxième somme, on a :

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = 0$$

**19** Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{\alpha}{t - 1} + \frac{\beta}{t + 1}$$

En déduire la valeur de la somme :  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$ .

Cherchons  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2 - 1} &= \frac{\alpha}{t - 1} + \frac{\beta}{t + 1} \\ \iff \forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2 - 1} &= \frac{\alpha(t + 1) + \beta(t - 1)}{(t - 1)(t + 1)} \\ \iff \forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2 - 1} &= \frac{\alpha(t + 1) + \beta(t - 1)}{(t - 1)(t + 1)} \\ \iff \forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2 - 1} &= \frac{(\alpha + \beta)t + (\alpha - \beta)}{t^2 - 1} \end{aligned}$$

Il suffit de prendre  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 2\alpha = 1 \end{cases} \iff \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

On a donc :

$$\forall t > 1, \quad \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{t - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{t + 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} \right)$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k - 1} - \frac{1}{k + 1} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} \right)$$

**20** Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

Démontrons le résultat par récurrence. Notons pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{P}(n) : \ll \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \gg.$$

- Pour  $n = 1$ , on a  $\sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{(-1)^{1-1}}{1} + \frac{(-1)^{2-1}}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

Par ailleurs,  $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$ .

La propriété  $\mathcal{P}(1)$  est donc bien vérifiée.

- Soit  $n \geq 1$  fixé. Supposons que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  soit vérifiée pour cet entier  $n$ , c'est-à-dire, on a  $\ll \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \gg$ .

Montrons qu'alors on a également  $\mathcal{P}(n+1)$ , c'est-à-dire  $\ll \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} \gg$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &\stackrel{HR}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{\substack{\ell=0 \\ k=\ell+1}}^{n-1} \frac{1}{n+\ell+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \left( \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+\ell} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+\ell} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+1} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+\ell} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+1+(n+1)} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+\ell} \end{aligned}$$

Ainsi  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie également.

- Par récurrence, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

**21** Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1)$$

Démontrons le résultat par récurrence.

Notons pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{P}(n) : \ll \prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) \gg$$

- Pour  $n = 1$ , on a  $\prod_{k=1}^1 (1+k) = 2$  et  $2^1 \prod_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \times 1 = 2$ . La propriété  $\mathcal{P}(1)$  est donc bien vérifiée.
- Soit  $n \geq 1$  fixé. Supposons que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  soit vérifiée pour cet entier  $n$ , c'est-à-dire, on a  $\ll \prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) \gg$ .

Montrons qu'alors on a également  $\mathcal{P}(n+1)$ , c'est-à-dire  $\ll \prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k) = 2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} (2k-1) \gg$ .

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k) &= \prod_{\ell=2}^{n+2} (n+\ell) \quad (\text{on pose } \ell = k+1) \\ &= \left( \prod_{\ell=1}^n (n+\ell) \right) \times \frac{(n+(n+1))(n+(n+2))}{n+1} \\ &\stackrel{HR}{=} \left( 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) \right) \times \frac{(2n+1) \times 2(n+1)}{n+1} \\ &= \left( 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) \right) \times 2 \times (2(n+1)-1) \\ &= 2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} (2k-1) \end{aligned}$$

Ainsi  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie également.

- Par récurrence, on a donc que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

**22** En utilisant les relations de Chasles, calculer pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n), \quad \sum_{k=0}^{2n} \max(k, n)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n) &= \sum_{k=0}^n \min(k, n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k, n) \\ &= \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=n+1}^{2n} n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n \times n \\ &= \frac{3n^2 + n}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} \max(k, n) &= \sum_{k=0}^n \max(k, n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \max(k, n) \\ &= \sum_{k=0}^n n + \sum_{k=n+1}^{2n} k \\ &= n \times (n+1) + \left( \sum_{k=0}^{2n} k \right) - \left( \sum_{k=0}^n k \right) \\ &= n(n+1) + \frac{(2n)(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{5n^2 + 3n}{2} \end{aligned}$$

**23** Calculer les sommes suivantes pour  $n \geq 2$  :

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1. $\sum_{k=0}^n (-1)^k$                      | 9. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1}$                 | 17. $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} 2^k$         |
| 2. $\sum_{k=2}^n 2^k$                         | 10. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} 2^{2k}$         | 18. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} 3^{k-1} 2^{n-k}$  |
| 3. $\sum_{k=0}^{2n} 5^{-k}$                   | 11. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} (-1)^k 3^{k-1}$ | 19. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} (-1)^k 3^{k+1}$   |
| 4. $\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^{3k-2}}$ | 12. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$           | 20. $\sum_{k=1}^n k \binom{n+1}{k} 2^k$            |
| 5. $\sum_{k=0}^n (2k+1)$                      | 13. $\sum_{k=2}^n \frac{2+4^{n+k}}{2^k}$         | 21. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$                |
| 6. $\sum_{k=0}^n \frac{3^{n+k}}{2^k}$         | 14. $\sum_{k=1}^n k(k^2-2k)$                     | 22. $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1}$ |
| 7. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$                | 15. $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$                 | 23. $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} 3^{n-k+1} \binom{n}{k}$  |
| 8. $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k}$              | 16. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 3^k$            |  |

$$1. \sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} = \frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$2. \sum_{k=2}^n 2^k = 2^2 \times \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} = 4(2^{n-1} - 1) = 2^{n+1} - 4.$$

$$3. \sum_{k=0}^{2n} 5^{-k} = \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}\right).$$

$$4. \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^{3k-2}} = -4 \sum_{k=2}^n \left(\frac{-1}{8}\right)^k = -4 \left(\frac{-1}{8}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{-1}{8}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{-1}{18} \left(1 - \left(\frac{-1}{8}\right)^{n-1}\right).$$

$$5. \sum_{k=0}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2$$

$$6. \sum_{k=0}^n \frac{3^{n+k}}{2^k} = 3^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k = 3^n \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} = -2 \times 3^n \times \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$7. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$8. \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

$$9. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \binom{n}{n+1} - \binom{n}{0} = 2^n + 0 - 1 = 2^n - 1$$

10.  $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} 2^{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{2(k+1)} = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 4^k = 4 \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k - \binom{n}{n} 4^n \right) = 4(5^n - 4^n)$
11. 
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} (-1)^k 3^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} 3^{k-2} = \frac{-1}{9} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} (-3)^k \\ &= \frac{-1}{9} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-3)^k - \binom{n}{0} + \binom{n}{n+1} (-3)^{n+1} \right) = \frac{-1}{9} ((-2)^n - 1) \end{aligned}$$
12.  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
13.  $\sum_{k=2}^n \frac{2+4^{n+k}}{2^k} = 2 \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k + 4^n \sum_{k=2}^n 2^k = 2 \left(\frac{1}{4}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} + 4^n \cdot 2^2 \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4^{n+1} (2^{n-1} - 1)$
14.  $\sum_{k=1}^n k(k^2 - 2k) = \sum_{k=1}^n k^3 - 2 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(3n^2 - 5n - 4)}{12}$
15.  $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{j=1}^n (2j)^2 - \sum_{j=1}^n (2j-1)^2 = 4 \sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n (4j^2 - 4j + 1) = 4 \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^n 1 = 2n(n+1) - n = n(2n+1)$
16.  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} 3^k = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 3^{j+1} = 3n(3+1)^{n-1} = 3n4^{n-1}$
17.  $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} 2^k \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} 2^k = n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} 2^k = n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} 2^{j+2} = 4n(n-1)3^{n-2}$
18.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} 3^{k-1} 2^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j} 3^{j-2} 2^{n-j+1} = \frac{2}{9} \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 3^j 2^{n-j} - 2^n \right) = \frac{2}{9} (5^n - 2^n)$
19.  $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} (-1)^k 3^{k+1} = 3 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-3)^{j+1} = -9 \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-3)^j - (-3)^n \right) = -9((-2)^n - (-3)^n)$
20.  $\sum_{k=1}^n k \binom{n+1}{k} 2^k = \sum_{k=1}^n (n+1) \binom{n}{k-1} 2^k = (n+1) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} 2^{j+1} = 2(n+1) \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^j - 2^n \right) = 2(n+1)(3^n - 2^n)$
21.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$
22.  $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-2)^k - \binom{2n}{0} (-2)^0 \right) = \frac{1}{2} ((-1)^{2n} - 1) = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0.$
23.  $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} 3^{n-k+1} \binom{n}{k} = \frac{3}{2} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} - \binom{n}{0} 2^0 3^n \right) = \frac{3}{2} (5^n - 3^n).$



**24** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour  $k > p$ ,  $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$ .

En déduire que pour  $n \geq p$ , on a  $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ .

*Application* : Calculer  $\sum_{k=4}^{20} k(k-1)(k-2)(k-3)$ .

La première formule découle directement de la formule de Pascal :

$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$$

donc :

$$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$$

On en déduit que pour tous entiers tels que  $n \geq p$ , en reconnaissant une somme télescopique :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \left( \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

*Application* :

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^{20} k(k-1)(k-2)(k-3) &= \sum_{k=4}^{20} \frac{k!}{(k-4)!} \\ &= 4! \sum_{k=4}^{20} \frac{k!}{4!(k-4)!} \\ &= 24 \sum_{k=4}^{20} \binom{k}{4} \\ &= 24 \binom{21}{5} \end{aligned}$$

**25** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers tels que  $1 \leq p \leq n - 1$ .

Montrer que pour tout entier  $j$  tel que  $0 \leq j \leq p$ , on a :  $\binom{n}{j} \binom{n-j}{p-j} = \binom{n}{p} \binom{p}{j}$ .

En déduire la valeur de  $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{p-j}$

Pour  $1 \leq p \leq n - 1$  et  $0 \leq j \leq p$ , on a :

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{p-j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{(n-j)!}{(p-j)!(n-p)!} = \frac{n!}{j!(p-j)!(n-p)!}$$

et par ailleurs :

$$\binom{n}{p} \binom{p}{j} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{p!}{j!(p-j)!} = \frac{n!}{(n-p)!j!(p-j)!}$$

On a donc bien égalité :

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{p-j} = \binom{n}{p} \binom{p}{j}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{p-j} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{p} \binom{p}{j} \\ &= \binom{n}{p} \sum_{j=0}^n \binom{p}{j} \\ &= \binom{n}{p} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \\ &= \binom{n}{p} 2^p \end{aligned}$$

**26** Calculer les sommes doubles suivantes pour  $n \geq 2$  :

1.  $\sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{2i-j}$ .
2.  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$ .
3.  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$ .
4.  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} i$ .
5.  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$ .
6.  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}$ .

1.

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{2i-j} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^{2i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^j = \left(\sum_{i=0}^n 4^i\right) \left(\sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j\right) \\ &= \frac{1-4^{n+1}}{1-4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (4^{n+1} - 1) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \max(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \max(i, j) + \sum_{i=1}^n \max(i, i) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} i + \sum_{i=1}^n i = 2 \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} j \right) + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2 \left( \sum_{j=2}^n \left( \sum_{i=1}^{j-1} j \right) \right) + \frac{n(n+1)}{2} = 2 \sum_{j=2}^n (j-1)j + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2 \times \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \end{aligned}$$

$$3. \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \left( \sum_{i=1}^n i \right) \left( \sum_{j=1}^n j \right) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$4. \sum_{1 \leq i < j \leq n} i = \sum_{i=1}^{n-1} \left( i \sum_{j=i+1}^n 1 \right) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = n \times \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

5.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n i + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} j = \sum_{i=1}^n i(n-i) + \sum_{j=1}^n j(j-1) \\ &= \sum_{k=1}^n (k(n-k) + k(k-1)) = \sum_{k=1}^n (n-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$6. \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) = \frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n^2 + 3n}{4}$$

27 Vérifier que pour tout  $n \geq 1$  :  $\sum_{k=1}^n k2^k = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k$ , puis calculer cette somme.

$$\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^k 2^k \right) = \sum_{k=1}^n \left( 2^k \sum_{j=1}^k 1 \right) = \sum_{k=1}^n 2^k \times k$$

L'égalité est bien vérifiée.

Cependant, on peut calculer la somme double d'une autre manière :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=j}^n 2^k \right) \\ &= \sum_{j=1}^n 2^j \frac{1 - 2^{n-j+1}}{1 - 2} \\ &= \sum_{j=1}^n 2^j (2^{n-j+1} - 1) \\ &= \sum_{j=1}^n (2^{n+1} - 2^j) \\ &= n2^{n+1} - \sum_{j=1}^n 2^j \\ &= n2^{n+1} - 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} \\ &= n2^{n+1} - 2(2^n - 1) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^n k2^k = (n - 1)2^{n+1} + 2$$

**28** Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites de réels. On définit deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad v_n = b_{n+1} - b_n$$

1. Montrer que :  $\sum_{k=0}^n a_k b_k = u_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k v_k$ .
2. Application : calculer la somme  $\sum_{k=0}^n 2^k k$ .

1. Remarquons que :

$$a_0 = u_0$$

et

$$\forall n \geq 1, a_n = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k-1} = u_n - u_{n-1}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k-1}) b_k \quad (\text{en convenant que } u_{-1} = 0) \\ &= \sum_{k=0}^n u_k b_k - \sum_{k=0}^n u_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=0}^n u_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k b_{k+1} \\ &= u_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k (b_k - b_{k+1}) \\ &= u_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k v_k \end{aligned}$$

2. En notant  $a_k = 2^k$  et  $b_k = k$ , on a alors :

$$u_n = \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1, \quad \text{et} \quad v_n = b_{n+1} - b_n = (n+1) - n = 1$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^n 2^k k = (2^{n+1} - 1)n - \sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1} - 1) = (2^{n+1} - 1)n - 2(2^n - 1) + n = 2^{n+1}(n-1) + 2$$

**29** Montrer que pour  $N \geq 1$  : 
$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}.$$

On fait simplement une permutation des deux sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} &= \sum_{0 \leq n < k \leq N} \frac{(-1)^k}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^N \left( \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^k}{k^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left( \frac{(-1)^k}{k^2} \times k \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k} \end{aligned}$$

**30** On note pour  $n \geq 2$ :  $V = \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij$ ,  $W = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} ij$ ,  $X = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$ ,  $Y = \prod_{1 \leq j < i \leq n} ij$ ,  
 $Z = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$ .

Calculer  $V$ . En déduire  $W$ . Exprimer  $W$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .

Montrer, sans calcul, que  $X = Y$ . En déduire  $X$  puis  $Z$ .

$$V = \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^n ij \right) = \prod_{i=1}^n \left( i^n \prod_{j=1}^n j \right) = \prod_{i=1}^n (n! i^n) = (n!)^n \prod_{i=1}^n i^n = (n!)^n \times (n!)^n = (n!)^{2n}$$

$$W = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} ij = \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij}{\prod_{i=1}^n i^2} = \frac{V}{(n!)^2} = \frac{(n!)^{2n}}{(n!)^2} = (n!)^{2n-2}$$

On a :

$$W = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} ij = \frac{\left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij \right) \times \left( \prod_{1 \leq j < i \leq n} ij \right)}{\left( \prod_{i=1}^n i^2 \right) \times \left( \prod_{i=1}^n i^2 \right)} = \frac{XY}{(n!)^2 \times (n!)^2} = \frac{XY}{(n!)^4}$$

Par symétrie des indices,  $X = Y$ , donc :

$$X^2 = (n!)^4 W = (n!)^4 (n!)^{2n-2} = (n!)^{2n+2}$$

D'où :

$$X = (n!)^{n+1}$$

Et enfin,

$$Z = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} ij}{\prod_{i=1}^n i^2} = \frac{X}{(n!)^2} = (n!)^{n-1}$$

**31** On considère la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$

1. Montrer par récurrence sur  $n$  que  $u_n$  existe et  $1 \leq u_n \leq 2$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = \frac{1}{u_n-2}$ .

(a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique.

(b) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

1. Notons pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n) : 1 \leq u_n \leq 2$ .

• La propriété est vraie pour  $n = 0$  car  $u_0 = 1$ .

• Soit un entier  $n$ . Si on suppose que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est encore vraie. Comme  $u_n < 4$ ,  $u_{n+1}$  existe et par opérations on a:  $\frac{4}{3} \leq u_{n+1} \leq \frac{4}{2}$ .

• La propriété  $\mathcal{P}(n)$  est donc vraie pour tout entier  $n$ .

2. (a)  $v_{n+1} = \frac{4-u_n}{4-2(4-u_n)} = \frac{4-u_n}{2(u_n-2)}$  donc  $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{2}$

(b) On a d'après le cours  $v_n = v_0 + n \times \frac{-1}{2} = -1 + \frac{-n}{2}$  ainsi  $u_n = \frac{2}{-2-n} + 2 = \frac{2+2n}{n+2}$



**32** On considère la suite définie par  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{3}{4-u_n}$ .

1. Montrer par récurrence sur  $n$  que  $u_n$  existe et  $1 < u_n < 3$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-3}$ .

(a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.

(b) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

1. Notons pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n) : 1 < u_n < 3$ .

• La propriété est vraie pour  $n = 0$  car  $u_0 = 2$ .

• Soit un entier  $n$ . Si on suppose que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est encore vraie. Comme  $u_n < 4$ ,  $u_{n+1}$  existe et par opérations on a:  $\frac{3}{3} < u_{n+1} < 3$ .

• La propriété est donc vraie pour tout entier  $n$ .

2. (a)  $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-3} = \frac{u_n-1}{3(u_n-3)}$  donc  $v_{n+1} = \frac{1}{3} \times v_n$

(b) On a d'après le cours  $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$  ainsi  $u_n = \frac{-3v_n+1}{1-v_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{3^n+3}{3^{n+1}}$

**33** Calculer le terme général des suites  $(u_n)$  suivantes :

1.  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 4$ .
2.  $u_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3v_n + 4$ .
3.  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

1. La suite est arithmético-géométrique, d'équation caractéristique associée  $x = -2x + 4 \iff x = \frac{4}{3}$ .

La suite  $\left(u_n - \frac{4}{3}\right)_{n \geq 0}$  est donc géométrique de raison  $-2$ . On a donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \frac{4}{3} = (-2)^n \left(u_0 - \frac{4}{3}\right)$ , ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4}{3} - \frac{(-2)^n}{3}$$

2. La suite est arithmético-géométrique, d'équation caractéristique associée  $x = 3x + 4 \iff x = -2$ .

La suite  $(u_n + 2)_{n \geq 0}$  est donc géométrique de raison  $3$ . On a donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 2 = 3^n (u_0 + 2)$ , ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 \times 3^n - 2$$

3. Par une récurrence rapide, on voit que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  existe et  $u_n > 0$ .

Posons alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$ .

On a  $v_0 = \ln(u_0) = \ln(1) = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(\sqrt{2u_n}) = \frac{1}{2} \ln(2u_n) + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} v_n$$

La suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est donc arithmético-géométrique, d'équation associée  $x = \frac{1}{2}x + \frac{\ln(2)}{2} \iff x = \ln(2)$ .

La suite  $(v_n - \ln(2))$  est donc géométrique de raison  $1/2$ , donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - \ln(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - \ln(2)) \implies v_n = \ln(2) - \frac{\ln(2)}{2^n} = \ln(2) \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

et on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \exp(v_n) = \exp\left(\ln(2) \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right) = \boxed{2^{1 - \frac{1}{2^n}}}$$

**34** On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n - 1. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2^n - n$ .
2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}.$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}}.$$

(c) Calculer finalement la valeur de  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$  en fonction de  $n$ .

1. Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n = 2^n - n$  ».

- Initialisation.

Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 1$  et  $2^0 - 0 = 1 - 0 = 1$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est bien vraie.

- Hérédité.

Soit  $n \geq 0$  fixé. Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait  $\mathcal{P}(n)$  vraie, i.e.  $u_n = 2^n - n$ . Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, i.e. montrons que  $u_{n+1} = 2^{n+1} - (n+1)$ .

$$u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \stackrel{HR}{=} 2(2^n - n) + n - 1 = 2^{n+1} - 2n + n - 1 = 2^{n+1} - (n+1)$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est bien vraie.

- Conclusion. Par récurrence, on a bien que  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$  est vraie.

2. (a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{(2u_n + n - 1) - 1}{2^n} = \frac{2(u_n - 1) + n}{2^n} = \boxed{\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}}$$

(b) On a pour  $n \geq 1$ , en reconnaissant une somme télescopique.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{u_{k+1} - 1}{2^k} - \frac{u_k - 1}{2^{k-1}} \right) = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} - \frac{u_0 - 1}{2^{-1}} = \boxed{\frac{u_n - 1}{2^{n-1}}}$$

(c) On en déduit finalement, d'après 1 et 2(b) que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{2^n - n - 1}{2^{n-1}} = \boxed{2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}}$$

**35** On souhaite montrer que pour tous entiers  $p, n$  tels que  $0 \leq p \leq n - 1$  :

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$$

1. Démontrer la formule en utilisant plusieurs fois la relation de Pascal :  $\binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} - \binom{n-1}{p-1}$ .
  2. Démontrer la formule par récurrence sur  $n$ .
  3. Démontrer la formule par récurrence sur  $p$ .
- (Rappel : par convention, on pose que si  $p \geq n$ ,  $\binom{n-1}{p} = 0$ ).

1. Soient  $n$  et  $p$  tels que  $0 \leq p \leq n - 1$ . On a :

$$\begin{aligned} (-1)^p \binom{n-1}{p} &= (-1)^p \left( \binom{n}{p} - \binom{n-1}{p-1} \right) \\ &= (-1)^p \binom{n}{p} + (-1)^{p-1} \binom{n-1}{p-1} \\ &= (-1)^p \binom{n}{p} + (-1)^{p-1} \left( \binom{n}{p-1} - \binom{n-1}{p-2} \right) \\ &= (-1)^p \binom{n}{p} + (-1)^{p-1} \binom{n}{p-1} + (-1)^{p-2} \binom{n-1}{p-2} \\ &= (-1)^p \binom{n}{p} + (-1)^{p-1} \binom{n}{p-1} + (-1)^{p-2} \left( \binom{n}{p-2} - \binom{n-1}{p-3} \right) \\ &= (-1)^p \binom{n}{p} + (-1)^{p-1} \binom{n}{p-1} + (-1)^{p-2} \binom{n}{p-2} + (-1)^{p-3} \binom{n-1}{p-3} \\ &= \vdots \quad (\text{on réitère le raisonnement } p \text{ fois}) \\ &= (-1)^p \binom{n}{p} + (-1)^{p-1} \binom{n}{p-1} + \dots + (-1)^0 \binom{n}{0} \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

2. Notons pour tout entier  $n \geq 1$  :  $\mathcal{P}(n)$  : «  $\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$  ».

- Pour  $n = 1$ , (et  $p = 0$ ), on a bien que  $\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^0 \binom{1}{0} = 1 = (-1)^0 \binom{0}{0}$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 1$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie.  
Montrons qu'alors que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, i.e. que :

$$\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n+1}{k} = (-1)^p \binom{n}{p}$$

On a en utilisant la formule de Pascal :

$$\begin{aligned}
 \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \quad (\text{en convenant que } \binom{n}{0} = 0) \\
 &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{n}{k-1} \\
 &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \\
 &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{n}{k} \\
 &= (-1)^p \binom{n}{p}
 \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est bien vraie.

- Par récurrence, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

3. Posons pour tout  $p \geq 0$ , on pose  $\mathcal{Q}(p) : \ll \forall n \geq p+1, \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p} \gg$

- Pour  $p = 0$ , on a :

$$\forall n \geq 1, (-1)^0 \binom{n}{0} = 1 = (-1)^0 \binom{n-1}{0}$$

donc  $\mathcal{Q}(0)$  est vraie.

- Soit  $p \geq 0$ . Supposons  $\mathcal{Q}(p)$  vraie et montrons que  $\mathcal{Q}(p+1)$  est vraie, c'est-à-dire montrons que :

$$\forall n \geq p+2, \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^{p+1} \binom{n-1}{p+1}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \forall n \geq p+2, \quad \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} + (-1)^{p+1} \binom{n}{p+1} \\
 &= (-1)^p \binom{n-1}{p} + (-1)^{p+1} \binom{n}{p+1} \\
 &= (-1)^{p+1} \left( \binom{n}{p+1} - \binom{n-1}{p} \right) \\
 &= (-1)^{p+1} \binom{n-1}{p+1}
 \end{aligned}$$

On a donc bien  $\mathcal{Q}(p+1)$  vraie.

- Ainsi, par récurrence,  $\forall p \geq 0$ ,  $\mathcal{Q}(p)$  est vraie.

**36** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + 2^n$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N} : a_n = n2^{n-1}$
2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$$

3. Rappeler la valeur de la somme  $\sum_{k=0}^n 2^k$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

1. Raisonnons par récurrence.

Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n) : \ll a_n = n2^{n-1} \gg$ .

- Pour  $n = 0$ , on sait que  $a_0 = 0$  et  $0 \times 2^{-1} = 0$  aussi, donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$  fixé.

Supposons que pour cet entier  $n$ , on ait  $\mathcal{P}(n)$  vraie, i.e.  $\ll a_n = n2^{n-1} \gg$ .

Montrons qu'alors on a  $\mathcal{P}(n+1)$  vraie aussi, i.e.  $\ll a_{n+1} = (n+1)2^n \gg$ .

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^n \stackrel{HR}{=} 2(n2^{n-1}) + 2^n = 2^n n + 2^n = (n+1)2^n$$

donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est bien vraie.

- Par récurrence, on a donc bien que :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n2^{n-1}$ .

2. On reconnaît une somme télescopique ! On a donc :

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 = a_{n+1} - 0 = a_{n+1}$$

3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$ .

4. Finalement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} = (n+1)2^n$$

mais également :

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^n (a_k + 2^k) = \sum_{k=0}^n (k2^{k-1} + 2^k) = \sum_{k=0}^n k2^{k-1} + (2^{n+1} - 1)$$

On en déduit par égalité que :

$$(n+1)2^n = \sum_{k=0}^n k2^{k-1} + 2^{n+1} - 1$$

autrement dit :

$$\sum_{k=0}^n k2^{k-1} = (n+1)2^n - 2^{n+1} + 1 = (n+1-2)2^n + 1 = \boxed{(n-1)2^n + 1}$$

37

1. Soit  $p$  un entier fixé, tel que  $p \geq 1$ . Montrer par récurrence que :  $\forall n \geq p, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ .
2. Montrer que pour tout entier  $k \geq 2$ , on a :  $k^4 = 24 \binom{k+2}{4} - 2k^3 + k^2 + 2k$ .
3. Soit  $n \geq 2$ . Calculer  $\sum_{k=2}^n k$ ,  $\sum_{k=2}^n k^2$  et  $\sum_{k=2}^n k^3$ .
4. Montrer pour  $n \geq 2$ , on a :

$$\sum_{k=2}^n \binom{k+2}{4} = \binom{n+3}{5}$$

5. En déduire que pour  $n \geq 2$  :

$$\sum_{k=2}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30} - 1$$

1. Procédons par récurrence comme indiqué dans l'énoncé.

Notons :

$$\forall n \geq p, \mathcal{P}(n) : \ll \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \gg$$

- Pour  $n = p$ , on a :

$$\sum_{k=p}^p \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$$

et par ailleurs :

$$\binom{p+1}{p+1} = 1 \text{ aussi}$$

donc  $\mathcal{P}(p)$  est vraie.

- Soit  $n \geq p$  fixé. Supposons que pour cet entier  $n$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, i.e. que  $\ll \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \gg$ .

Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie aussi, c'est-à-dire que :

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &\stackrel{HR}{=} \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+2}{p+1} \text{ d'après la formule de Pascal} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(n+1)$  est bien vraie.

- Finalement, par récurrence, on a bien que :  $\forall n \geq p$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

2. Soit  $k \geq 2$ . On a :

$$\binom{k+2}{4} = \frac{(k+2)(k+1)k(k-1)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{(k+2)(k+1)k(k-1)}{24}$$

Ainsi :

$$24 \binom{k+2}{4} - 2k^3 + k^2 + 2k = (k+2)(k+1)k(k-1) - 2k^3 + k^2 + 2k = (k^4 + 2k^3 - k^2 - 2k) - 2k^3 + k^2 + 2k = k^4$$

On a donc bien que :

$$k^4 = 24 \binom{k+2}{4} - 2k^3 + k^2 + 2k$$

3. Soit  $n \geq 2$ . On a :

$$\sum_{k=2}^n k = \sum_{k=1}^n k - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

et

$$\sum_{k=2}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 - 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1$$

et

$$\sum_{k=2}^n k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 - 1^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1$$

4. Soit  $n \geq 2$ . Avec un changement d'indice  $j = k + 2$ , puis en appliquant la formule démontrée dans la question 1, on obtient :

$$\sum_{k=2}^n \binom{k+2}{4} = \sum_{j=4}^{n+2} \binom{j}{4} = \binom{(n+2)+1}{4+1} = \binom{n+3}{5}$$

5. Finalement :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k^4 &= \sum_{k=2}^n \left( 24 \binom{k+2}{4} - 2k^3 + k^2 + 2k \right) \\ &= 24 \sum_{k=2}^n \binom{k+2}{4} - 2 \sum_{k=2}^n k^3 + \sum_{k=2}^n k^2 + 2 \sum_{k=2}^n 2k \\ &= 24 \binom{n+3}{5} - 2 \left( \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1 \right) + \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right) + 2 \left( \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{5} - \frac{n^2(n+1)^2}{2} + 2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 + n(n+1) - 2 \\ &= n(n+1) \left[ \frac{(n+3)(n+2)(n-1)}{5} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+1}{6} + 1 \right] - 1 \\ &= n(n+1) \left[ \frac{6(n^3 + 4n^2 + n - 6) - 15(n^2 + n) + 5(2n+1) + 30}{30} \right] - 1 \\ &= \boxed{n(n+1) \frac{6n^3 + 9n^2 + n - 1}{30} - 1} \end{aligned}$$



**38** On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}.$$

1. Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ .
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ .
3. (a) Vérifier que pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n(u_{n+1} + u_n)}.$$

(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ .

(c) Calculer pour  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$  et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}.$$

(d) Rappeler la valeur de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$ . En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 2.$$

4. On définit une suite  $(v_n)$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n^2.$$

- (a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  et de  $n$ .
- (b) Calculer la somme  $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$  de deux manières différentes.  
En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .
- (c) Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : " $u_n \geq 1$ ".

- $u_0 = 1 \geq 1$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie (i.e.  $u_n \geq 1$ ). Montrons alors que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. Il y a :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n \geq 1$$

- Par récurrence, on a donc bien :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ .

2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a bien :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n$$

3. (a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = u_{n+1}^2 - u_n^2 = \left(u_n^2 + \frac{1}{2^n}\right) - u_n^2 = \frac{1}{2^n}$$

On en déduit donc bien que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n(u_{n+1} + u_n)}$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$2^n(u_{n+1} + u_n) \geq 2^n \times (1 + 1) = 2^{n+1}$$

D'où :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n(u_{n+1} + u_n)} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$$

On, en déduit que :

$$u_n - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}$$

D'où :

$$u_n \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

(d) On a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{1 - \frac{1}{2^n}}$$

On en déduit que :

$$u_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} \leq 2$$

4. (a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n} = v_n + \frac{1}{2^n}$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

et par ailleurs

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0 = v_n - 1$$

D'où :

$$v_n = 1 + 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \boxed{3 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

(c) On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{v_n} = \boxed{\sqrt{3 - \frac{1}{2^{n-1}}}}$$