14.1 Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n, calculer $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de n et étudier les convergences des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

1. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{5}u_n$ pour $n \geq 0$
2. $u_2 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{14}{3} + \frac{1}{3}u_n$ pour $n \geq 2$.
3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -3 + \frac{1}{2}u_n$ pour $n \geq 0$
4. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$. On justifiera que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ puis on considèrera la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln u_n$.

14.2 Soit la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$. Etudier suivant les valeurs de a et b la nature de la suite (u_n).

14.3 Etudier la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_0 = 1$, $v_1 = 2$ et $\forall n \geq 2, v_{n+2} = \sqrt{v_n v_{n+1}}$.

14.4 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$. Calculer u_n en fonction de n.

14.5 Soit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante et soit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$.

14.6

1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \quad \frac{n^3 - 2n + 4e{-}n}{2n^3 + \ln n} > \frac{1}{4}$
2. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ 0 < e^{-n} \leq \frac{1}{n^2}$

14.7 Soit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par $\forall n \geq 1,\ S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2. Montrer que $\forall n \geq 1,\ S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire la nature de la suite (S_n).
4. Un élève a écrit : "Comme $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} S_{n+1} - S_n = 0$. Par conséquent l'écart entre un terme de la suite et son suivant tend vers 0, la suite (S_n) est donc convergente." Que pensez-vous de son raisonnement ?

14.8 Etudier la nature de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sin k$.

14.9 Dans cet exercice, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \cos x$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. On rappelle que $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$ pour tout réel a. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est géométrique.
3. En déduire la nature de la suite (u_n) et sa limite si celle-ci est convergente.

14.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

14.11 Etudier la convergence éventuelle des suites de termes :

1. $x_n = n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
2. $u_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
3. $t_n = \frac{n!}{2^n}$ (Indication : montrer que $\forall n \geq 2, t_{n+1} \geq \frac{3}{2}t_n > 0$)

14.12 Soit la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ définie par $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que les suites $(w_{2n})_{n\geq 1}$ et $(w_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire pour la suite $(w_n)_{n\geq 1}$?

14.13 Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

14.14 Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Calculer $f(0)$ puis étudier la parité de f.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, f(nx) = nf(x)$ et en déduire que $\forall k \in \mathbb{Z} n \forall x \in \mathbb{R}, f(kx) = kf(x)$.
3. Soit $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $f(r) = \lambda r$ avec $\lambda = f(1)$.
4. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x$

14.15

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 1 + x \leq e^x$.
2. Démontrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ définie pour $n \geq 1$ par $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ est convergente.

14.16 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$, $u_3 = 0$ et $\forall n \geq 2$, $u_n = 4u_{n-2}$. Déterminer u_n en fonction de n. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

14.17 Discuter suivant la valeur de u_0 la convergence de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

14.18 Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = \frac{3}{2}$ et $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$.

14.19 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée puis que si elle est convergente, il n'y a qu'une seule limite possible. La déterminer.

   Nous allons montrer que (u_n) converge par deux méthodes.
2. **Méthode 1** : Utilisation des suites d'indices pairs et impairs.
   (a) Déterminer l'expression de la fonction associée aux suites d'indices pairs et impairs.
   (b) Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes. Déterminer leur limite. Conclure.
3. **Méthode 2** : Mettre en place une inégalité.
   (a) Montrer que $\forall n \geq 1,\ u_n \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]$.
   (b) Soit la fonction f définie sur $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ par $f(x) = \frac{2}{1+x}$. Montrer que $\forall x \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]$, $|f(x) - 1| \leq \frac{18}{25}|x-1|$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 1| \leq \left(\frac{18}{25}\right)^n |u_1 - 1|$. Conclure.

14.20 On définit $u_0 = 0$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{12 - x}$ (domaine de définition, variations, points fixes, graphe).
2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
3. (a) Etudier la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 1, |u_{2n+1} - u_{2n}| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}|u_{2n} - u_{2n-1}|$
   (c) En déduire que ces suites sont adjacentes.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?