13.1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$.
Montrer que f peut-être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$. Ce prolongement est-il de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

13.2 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

13.3 Soit la fonction f définie sur $]0,1]$ par $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

13.4 Déterminer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto e^{-x}(3x^2 + x - 5)$.

13.5 On note pour tout $n \geqslant 1$, $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$, et on note pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ g(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, calculer $g^{(n)}(x)$ en utilisant le polynôme P_n.

13.6 Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, f est n-fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x}$.
En déduire que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

13.7 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré n ayant n racines distinctes réelles.

1. Montrer que P' admet exactement $n-1$ racines distinctes réelles.
2. Montrer que toutes les racines de $P^2 + 1$ sont complexes et toutes simples.

13.8 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f'(a) = 0$, que $f(b) > 0$ et que $f'(b) < 0$.
Montrer que f' s'annule sur $]a,b[$.

13.9 Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$ dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

13.10 Montrer que pour tous $x, y \in [0,1[$ tels que $x < y$, on a :

$$\frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \mathrm{Arcsin}(y) - \mathrm{Arcsin}(x) < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}$$

13.11 Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\frac{1}{x+y} \leqslant \frac{1}{y} \ln\left(\frac{x+y}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}.$$

13.12 En appliquant le Théorème des Accroissements Finis à la fonction $h : x \mapsto \ln(\mathrm{Arctan}(x))$, calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{Arctan}(n+1)}{\mathrm{Arctan}(n)}\right)^{n^2}$.

13.13 Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

1. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
2. Démontrer que h admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0,1]$
3. Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$|h(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

13.14 Déterminer les intervalles où la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est convexe et concave.

13.15 Déterminer les points d'inflexions de la fonction cosinus.