09.1 Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} \lambda x + y &= 1 \\ x + \lambda y &= 1 \end{cases}$$

admet-il dans $\mathbb{R}^2$:
- aucune solution ?
- une unique solution ?
- une infinité de solutions ?

09.2 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x + y + z &= 5 \\ 2x + 13y - 7z &= -1 \\ x - y + z &= 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y - 7z + t &= 1 \\ 2x + 2y + z + 2t &= 0 \\ x - y - 2z + t &= -1 \\ x + 7y - 4z + t &= 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z + t &= 11 \\ 2x + y + z + t &= 2 \\ x + 2y + 2z &= 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 3x + 2y &= 14 \\ x - 2z &= 14 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x + 2y + 3z &= 2 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x - 4y + 2z + t &= 1 \\ y + z - t &= 0 \\ -3x + 6y - 3t &= -1 \end{cases}$

09.3 Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$, en fonction du paramètre réel m :

1. $\begin{cases} (1 + m^2)x - 3y &= 5 \\ 4y + 3z &= 8 \\ mz &= 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} mx + y + z &= m^2 \\ x + my - mz &= m \\ x - y + mz &= 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ 2x + 6y - 4z &= 2 \\ -3x - 9y + 6z &= m - 5 \end{cases}$

09.4 Résoudre le système suivant dans $\mathbb{C}^3$, en fonction des paramètres complexes λ et μ :

$$\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ x - y + z &= 4 \\ 2x + y + 3z &= \lambda \\ -x + 2y + z &= \mu \end{cases}$$

09.5 Montrer qu'il existe un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}, \ \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

09.6 Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y, x - 3y) \end{array}$ est surjective.

09.7 Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$ et $g(\mathbb{R}^3)$ où :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, -x + 2y, 5x - y) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y + z, x - 2y) \end{array}$$