**08.1** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

**08.2** Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que si $f$ est paire, alors sa dérivée est impaire.

**08.3** On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \frac{2 + 3\ln(x)}{1 - \ln(x)}$$

1. Démontrer que $f$ réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera.
2. Déterminer $f^{-1}(-4)$. Justifier que $f^{-1}$ est dérivable en $-4$ et calculer $(f^{-1})'(-4)$.

**08.4**

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\sin(x) \leqslant x$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

**08.5** Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \left( e^{1/x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+\sin(x)} - \sqrt{1-\sin(x)}}{\tan(x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} (1 - \sin(x))\tan^2(x)$

**08.6** Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1],\ \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$$

**08.7** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**08.8** Montrer que la fonction

$$f : x \longmapsto 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \operatorname{Arctan}(x)$$

est constante sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur.

**08.9** Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition, les symétries de $f$ (parité, périodicité), se ramener dans lequel l'expression de la fonction est simple, et en déduire la courbe

1. $g(x) = \cos(\operatorname{Arccos}(x))$
2. $g(x) = \sin(\operatorname{Arcsin}(x))$
3. $h(x) = \tan(\operatorname{Arctan}(x))$
4. $u(x) = \operatorname{Arccos}(\cos(x))$
5. $v(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin(x))$
6. $w(x) = \operatorname{Arctan}(\tan(x))$

**08.10** Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition et la simplifier en une expression en racines (n'utilisant plus de fonction trigonométrique ni réciproque)

1. $f(x) = \sin(\operatorname{Arccos}(x))$
2. $g(x) = \cos(\operatorname{Arcsin}(x))$
3. $h(x) = \tan(\operatorname{Arcsin}(x))$
4. $u(x) = \cos(\operatorname{Arctan}(x))$
5. $v(x) = \sin(\operatorname{Arctan}(x))$