

06.1 Calculer les limites des expressions suivantes aux points indiqués.

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ en 1 et $+\infty$ | 10. $\frac{\text{Ent}(x)}{x}$ |
| 2. $\frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$ en 0 | 11. $\sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$ |
| 3. $\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}$ en $+\infty$ | 12. $(x - 2) \ln(x^2 - x - 2)$ en 2^+ |
| 4. $\frac{1}{x}(\sqrt{x+1} - x - 1)$ en $+\infty$ | 13. $x^2 e^{-e^x}$ en $+\infty$ |
| 5. $\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}$ en 1 | 14. $e^{-1/x} \ln(x)$ en 0^+ |
| 6. $\frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ en 9 | 15. $e^x \ln(x^2 + x)$ en $-\infty$ |
| 7. $\sqrt{ \ln(x) }$ en 0^+ | 16. $(1 + x)^{1/x}$ en $+\infty$ |
| 8. $\frac{x}{ x + 2 }$ en -2 | 17. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en 0^+ |
| 9. $\text{Ent}(x) \ln(x)$ en 0^+ | 18. $\left(\frac{e^x}{x}\right)^{1/x}$ en $+\infty$ |
| | 19. $x^{\ln(x)}$ en 0^+ |
| | 20. $\frac{(-1)^{\text{Ent}(x)}}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ |

06.2 Pour $a > 0$ et $b > 0$ fixés, on considère la fonction définie sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = \frac{x}{a} \text{Ent}\left(\frac{b}{x}\right)$$

1. Montrer que pour tout réel t , on a $t - 1 < \text{Ent}(t) \leq t$.
2. En déduire les limites de $f(x)$ en 0^+ et 0^- . Qu'en déduire ?
3. Déterminer les limites de $f(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$.

06.3 On veut démontrer que la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$ (i.e. on veut redémontrer les résultats du cours appelés "croissances comparées").

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f et son domaine de dérivabilité.
2. Étudier les variations de la fonction f
3. Montrer que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
4. Montrer que $\ell \geq 0$.
5. En écrivant $f(2x)$ de deux façons différentes, déterminer ℓ .
6. Déterminer la limite en 0^+ de $x \ln(x)$
7. Déterminer la limite en $+\infty$ de $\frac{x}{e^x}$,
8. Déterminer la limite en $-\infty$ de $x e^x$.

06.4 Déterminer un équivalent simple et la limite des expressions suivantes au point indiqué :

- | | |
|--|---|
| 1. $\frac{\ln(1 + x^2)}{x}$ en 0 | 6. $\frac{\ln(4x^2 - 2x + 1)}{x}$ en 0 et $+\infty$ |
| 2. $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en 0 | 7. $\frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - \sqrt{x^2 + 1}}$ en $-\infty$ |
| 3. $\frac{\ln(x - 1)}{x - 2}$ en 2 | 8. $\frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1})}$ en 1^+ |
| 4. $\frac{\ln(2 + x) - \ln(2)}{\exp(\sqrt{1 + x}) - e}$ en 0 | 9. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x} - \sqrt{x}}}$ en $+\infty$ |
| 5. $\frac{x - 1}{x^n - 1}$ en 1 ($n \in \mathbb{N}^*$) | |

06.5 Calculer les limites des expressions suivantes aux points indiqués.

- | | |
|---|--|
| <p>1. $x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ en $+\infty$</p> <p>2. $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{e^x - 1}$ en 0</p> <p>3. $\frac{\ln(2-x^2)}{x-1}$ en 1</p> <p>4. $(1+x^2)^{\ln(x)/x}$ en 0^+</p> <p>5. $\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$ en $+\infty$</p> | <p>6. $\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2/2}$ en $+\infty$ et $-\infty$</p> <p>7. $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{x/2}$ en $+\infty$</p> <p>8. $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right)^{x \ln(x)}$ en 1^+ et $+\infty$</p> <p>9. $\frac{\ln(x+1)}{e^x - \sqrt{1+x}}$ en 0</p> |
|---|--|

06.6 Étudier la continuité en 0 des fonctions définies respectivement sur \mathbb{R} et sur \mathbb{R}^+ :

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+e^{1/x})}{e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

06.7 Étudier les branches infinies des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition.

- | | |
|---|--|
| <p>1. $f_1(x) = \frac{x^2}{x-1}$</p> <p>2. $f_2(x) = \frac{x^2+5}{2x+1}$</p> <p>3. $f_3(x) = x + \sqrt{x^2+x+1}$</p> <p>4. $f_4(x) = e^{-x} - 2x + 1$</p> <p>5. $f_5(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$</p> | <p>6. $f_6(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$</p> <p>7. $f_7(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$</p> <p>8. $f_8(x) = \frac{x^2 + \ln(x)}{ x }$</p> |
|---|--|